Stabilisation de la formule des traces tordue I: endoscopie tordue sur un corps local

Jean-Loup Waldspurger

Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local

J.-L. Waldspurger

18 janvier 2014

Introduction

Ceci est le premier d'une série d'articles, en collaboration avec C. Moeglin, visant à stabiliser la formule des traces tordue. L'essentiel du travail consiste à reprendre dans ce cadre tordu la démonstration (colossale) qu'Arthur a mise au point dans le cas non tordu. Mais auparavant, un certain nombre de travaux préparatoires sont nécessaires. Le texte qui suit est l'un d'eux. On y présente les définitions et propriétés de base de la théorie de l'endoscopie tordue sur un corps local de caractéristique nulle, du côté "géométrique", c'est-à-dire du côté des intégrales orbitales. Cela fournira, on l'espère, un socle pour la suite de nos travaux.

Ainsi, ce texte ne contient guère de résultats originaux. Il reprend largement les travaux fondamentaux de Kottwitz-Shelstad, Labesse et Shelstad sur la question. On a toutefois modifié sur certains points la présentation de ces auteurs. Donnons un peu plus de détails. La première section donne les définitions de base des espaces tordus et de leurs données endoscopiques. Les espaces tordus ont été introduits par Labesse et remplacent, avantageusement nous semble-t-il, les couples formés d'un groupe connexe et d'un automorphisme de celui-ci. Notons que, dans le cadre le plus général, on doit aussi associer aux données endoscopiques des espaces tordus. On en donne en 1.7 une définition parfaitement canonique, ce qui est l'un des points nouveaux de notre présentation. Un autre point nouveau est que l'on a fait disparaître le traditionnel groupe quasi-déployé G^*. A notre avis, ce groupe est mal adapté à l'endoscopie tordue, parce qu'il n'y a pas d'espace tordu $\tilde{G}^*$. Plus exactement, on peut définir un tel espace tordu, mais il n'y a pas de correspondance canonique entre les classes de conjugaison stable dans l'espace de départ $\tilde{G}$ et les classes de conjugaison stable dans cet espace $\tilde{G}^*$. Pour étudier la correspondance entre classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}$ et dans un espace endoscopique $\tilde{G}'$, correspondance qui est parfaitement canonique et équivariante pour les actions galoisiennes, ce n'est pas un bon point de départ de la décomposer en deux correspondances entre $\tilde{G}$ et $\tilde{G}^*$ d'une part, entre $\tilde{G}^*$ et $\tilde{G}'$ d'autre part, qui ne sont ni canoniques, ni équivariantes pour les actions galoisiennes. En fait, le groupe G^* sert rarement. Ce qui sert, c'est son tore maximal T^*. Mais ce tore se récupère facilement en utilisant la méthode qu'on a apprise de Deligne : c'est <u>*le*</u> tore maximal de G muni de son action galoisienne canonique, cf. 1.2. Dans la section 2, on récrit la définition des facteurs de transfert d'après Kottwitz et Shelstad, puis celle du transfert des intégrales orbitales. Une donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ étant fixée, pour définir ce transfert d'intégrales orbitales, on doit fixer des données auxiliaires, en particulier un groupe G'_1 au-dessus de G', et un facteur de transfert pour ces données. Malheureusement, la stabilisation de la formule des traces tordue nécessite de pouvoir changer de données auxiliaires. La raison en est que si $\tilde{M}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique de $\tilde{M}$, $\mathbf{M}'$ peut apparaître comme "donnée de Levi" de plusieurs données endoscopiques de $\tilde{G}$ et qu'on ne peut pas assurer que les restrictions à $\mathbf{M}'$ des données auxiliaires affectées à ces diverses données coïncident. Il convient donc de savoir ce qui se passe quand on change de données auxiliaires. Il s'avère que les objets construits à l'aide de deux séries de données auxiliaires sont canoniquement isomorphes. Mais alors, il est aussi simple d'éliminer formellement les données auxiliaires en remplaçant ces objets par leur limite inductive (par ces isomorphismes canoniques) sur toutes les données auxiliaires possibles. C'est ce que l'on fait en 2.5. Cette présentation permet ensuite de définir naturellement sur ces objets une action du groupe d'automorphismes de la donnée endoscopique $\mathbf{G}'$, cf. 2.6. Cette action est assez subtile car, dans la situation tordue, ce groupe d'automorphismes contient un sous-groupe qui agit trivialement sur le groupe G'. Mais il agit sur l'espace des fonctions sur ce groupe par multiplication par des caractères. La section 3 compare les données endoscopiques d'espaces de Levi avec les Levi de données endoscopiques. La section 4 décrit exactement l'image du transfert des intégrales orbitales. La section 5 introduit ce que l'on appelle les distributions ω-équivariantes "géométriques", qui sont celles dont le support est réduit à une réunion finie de classes de conjugaison. On a dualement un transfert entre de telles distributions et on détermine son noyau. On examine aussi le comportement de ces distributions par descente d'Harish-Chandra. Signalons que, dans le cas d'un corps archimédien, les résultats des sections 4 et 5 reposent essentiellement sur ceux de Renard et Shelstad. Enfin, on traite dans la section 6 le cas "non ramifié", où l'on peut définir des facteurs de transfert canoniques, modulo le choix "d'espaces hyperspéciaux".

1 Les définitions de base

1.1 Groupes et espaces tordus

Soit F un corps de caractéristique nulle, dont on fixe une clôture algébrique $\bar{F}$. Posons $\Gamma_F = Gal(\bar{F}/F)$. Soit G un groupe algébrique défini sur F, réductif et connexe. On l'identifie au groupe de ses points sur $\bar{F}$. Le groupe Γ_F agit sur G. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on note encore σ son action sur G, ou σ_G s'il semble bon de préciser. Pour $g \in G$, on note ad_g l'automorphisme intérieur $x \mapsto gxg^{-1}$ de G. On note $Z(G)$ le centre de G et A_G le plus grand sous-tore de $Z(G)$ qui soit déployé sur F (remarquons que A_G dépend du corps F). On pose $\mathcal{A}_G = X_*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, avec la notation X_* usuelle. On note G_{AD} le groupe adjoint de G et G_{SC} le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G. On notera souvent de la même façon un élément, ou un sous-ensemble, de G_{SC} et son image dans G. Néanmoins, si besoin est, on notera $\pi : G_{SC} \to G$ l'homomorphisme naturel. Si X est un sous-ensemble de G, on note X_{ad} son image dans G_{AD} et X_{sc} l'image réciproque de X_{ad} dans G_{SC} (ce qui n'est pas forcément l'image réciproque de X). On aura tendance à noter de la même façon deux objets qui se déduisent l'un de l'autre par fonctorialité. Par exemple, pour $g \in G$, on note encore ad_g les automorphismes de G_{AD} ou de G_{SC} qui se déduisent de l'automorphisme ad_g de G.

Soit $\tilde{G}$ un espace tordu sous G. C'est une variété algébrique sur F. Le groupe G agit à droite et à gauche sur $\tilde{G}$ et, pour chaque action, $\tilde{G}$ est un espace principal homogène sous G. Il y a une application $\gamma \mapsto ad_\gamma$ de $\tilde{G}$ dans le groupe des automorphismes de G telle que $\gamma g = ad_\gamma(g)\gamma$ pour tout $g \in G$. On a l'égalité $ad_{g\gamma g'} = ad_g \circ ad_\gamma \circ ad_{g'}$ pour tous $g, g' \in G$ et $\gamma \in \tilde{G}$. Les actions et applications ci-dessus sont toutes algébriques et définies sur F. Pour $\gamma \in \tilde{G}$, on note $Z_G(\gamma)$ son commutant dans G (c'est-à-dire l'ensemble des points fixes de ad_γ). On note $G_\gamma = Z_G(\gamma)^0$ la composante neutre de ce groupe. L'image de ad_γ dans le groupe des automorphismes extérieurs de G ne dépend pas de γ. D'autre part, l'automorphisme ad_γ définit par fonctorialité des automorphismes de divers objets. Quand ils ne dépendent pas de γ (ou même de γ dans un sous-ensemble indiqué), on note ces automorphismes θ. Ainsi, il y a un automorphisme θ du centre $Z(G)$. On note $A_{\tilde{G}}$ le plus grand tore déployé sur F contenu dans $Z(G)^\theta$. On pose $\mathcal{A}_{\tilde{G}} = X_*(A_{\tilde{G}}) \otimes \mathbb{R}$.

On dira que $\tilde{G}$ est à torsion intérieure si, pour $\gamma \in \tilde{G}$, l'automorphisme ad_γ de G est intérieur. En fixant γ et en le multipliant par un élément convenable de G, on obtient un élément tel que ad_γ soit l'identité. Alors l'application $g\gamma \mapsto g$ identifie $\tilde{G}$ à G muni de ses actions par multiplication à droite et à gauche. Mais cet isomorphisme n'est en général défini que sur $\bar{F}$, car on ne peut pas toujours trouver de γ comme ci-dessus qui appartienne à $\tilde{G}(F)$.

Exemple. On fixe un entier $n \geq 1$ et un élément $d \in F^\times$. On prend $G = SL(n)$ et $\tilde{G} = \{g \in GL(n); det(g) = d\}$. Cet espace tordu est trivial sur F si et seulement si d appartient au groupe $F^{\times,n}$ des puissances n-ièmes dans $F^\times$.

1.2 Paires de Borel

On appelle paire de Borel de G un couple (B,T) formé d'un sous-groupe de Borel B et d'un sous-tore maximal T de B. On ne suppose pas que B ou T soient définis sur F. On appelle paire de Borel épinglée un triplet $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ où (B,T) est une paire de Borel et $(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est un épinglage relatif à cette paire. C'est-à-dire que Δ est l'ensemble des racines simples de T agissant dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ du radical unipotent de B et, pour tout $\alpha \in \Delta$, E_α est un élément non nul de la droite radicielle $\mathfrak{u}_\alpha \subset \mathfrak{u}$ associée à α. Pour deux paires de Borel épinglées $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ et $\mathcal{E}' = (B', T', (E'_{\alpha'})_{\alpha'\in\Delta'})$, il existe $g \in G_{SC}$ tel que ad_g transporte $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$. Cet élément g n'est pas unique mais sa classe $gZ(G_{SC})$ l'est. Les restrictions de ad_g à B et T sont uniquement déterminées. Cela autorise à définir <u>*la*</u> paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^* = (B^*, T^*, (E^*_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ comme la limite inductive de toutes les paires de Borel épinglées, les applications de transition étant celles ci-dessus. Par un même procédé de limite inductive, on définit l'ensemble Σ des racines de T^* dans l'algèbre de Lie de G, l'ensemble $\check{\Sigma}$ des coracines et le groupe de Weyl W. Pour une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$, ces ensembles s'identifient évidemment aux mêmes ensembles relatifs à cette paire.

Le groupe Γ_F agit naturellement sur l'ensemble des paires de Borel ou des paires de Borel épinglées. On en déduit une action de Γ_F sur $\mathcal{E}^*$, notée $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$. Pour n'importe quelle paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$, σ_{G^*} est la composée des isomorphismes

$$\mathcal{E}^* \simeq \mathcal{E} \stackrel{\sigma_G}{\to} \sigma_G(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}^*.$$

On en déduit une action de Γ_F sur Δ, Σ, $\check{\Sigma}$ et W.

Pour une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ et pour $\sigma \in \Gamma_F$, choisissons $u_{\mathcal{E}}(\sigma) \in G_{SC}$ tel que $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)} \circ \sigma_G(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Alors l'isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}^*$ transporte l'action $\sigma \mapsto ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)} \circ \sigma_G$ sur $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$. L'application $\sigma \mapsto (u_{\mathcal{E}}(\sigma))_{ad}$ est un cocycle à valeurs dans G_{AD} dont la classe ne dépend pas de la paire $\mathcal{E}$. On dit qu'une paire de Borel ou une paire de Borel épinglée est définie sur F si et seulement si elle est fixe par l'action naturelle $\sigma \mapsto \sigma_G$. Dans le cas d'une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$, cela revient à dire que l'on peut choisir $u_{\mathcal{E}}(\sigma) = 1$ pour tout σ (mais, bien sûr, σ_G peut agir sur Δ par une permutation non triviale). Dans ce cas, on peut identifier $\mathcal{E}^*$ à $\mathcal{E}$ et l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ à l'action naturelle $\sigma \mapsto \sigma_G$. On dit que G est quasi-déployé si et seulement s'il existe une paire de Borel épinglée définie sur F (il suffit d'ailleurs qu'il existe une paire de Borel tout court définie sur F).

Pour toute paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$, notons $Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ l'ensemble des $e \in \tilde{G}$ tels que ad_e conserve $\mathcal{E}$. C'est un espace principal homogène sous $Z(G)$, à droite comme à gauche. Notons $\mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E})$ le quotient de $Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ par l'action par conjugaison de $Z(G)$. Alors $\mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E})$ est un espace principal homogène, à droite comme à gauche, sous $\mathcal{Z}(G) := Z(G)/(1-\theta)(Z(G))$ (on note $1-\theta$ l'homomorphisme $z \mapsto z\theta(z)^{-1}$). Si $\mathcal{E}'$ est une autre paire de Borel épinglée, on choisit comme ci-dessus $g \in G_{SC}$ tel que $ad_g(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$. Alors $ad_g : Z(\tilde{G},\mathcal{E}) \to Z(\tilde{G},\mathcal{E}')$ est un isomorphisme. Il n'est pas uniquement défini car g n'est pas unique. Mais, par passage aux quotients, ad_g définit un isomorphisme de $\mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E})$ sur $\mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E}')$ qui est uniquement défini. On note $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ la limite inductive des $\mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E})$ sur les paires de Borel épinglées, les applications de transition étant les isomorphismes canoniques que l'on vient de définir. Alors $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ est un espace tordu sous le groupe $\mathcal{Z}(G)$. On définit une action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ de Γ_F sur $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ comme on a défini l'action sur $\mathcal{E}^*$. On voit que $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ est un espace tordu sous $\mathcal{Z}(G)$, défini sur F. Remarquons que $\mathcal{Z}(\tilde{G})(F)$ peut être vide.

Soit $\mathcal{E} = (B,T,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ une paire de Borel épinglée. Pour $e \in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$, l'automorphisme ad_e de G ne dépend pas du choix de e. On le note $\theta_{\mathcal{E}}$ ou simplement θ. Remarquons que, si $\gamma \in \tilde{G}$ est tel que ad_γ conserve seulement (B,T), la restriction de ad_γ à T coïncide avec celle de θ. Par restriction puis passage à la limite, on obtient un automorphisme de $\mathcal{E}^*$ que l'on note θ^*. Il commute à l'action galoisienne sur $\mathcal{E}^*$. Rappelons deux propriétés cruciales du sous-groupe W^{θ^*} (avec la notation usuelle : c'est le sous-groupe des points fixes de θ^* agissant dans W) :

(1) un élément $\omega \in W$ appartient à W^{θ^*} si et seulement s'il conserve $(T^*)^{\theta^*}$ ou $(T^*)^{\theta^*,0}$;

(2) pour $\mathcal{E}$ et $e \in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ comme ci-dessus, W^{θ^*} s'identifie au groupe de Weyl de G_e relatif à son sous-tore maximal $T^{\theta,0}$.

1.3 Eléments semi-simples

Un élément $\gamma \in \tilde{G}$ est dit semi-simple si et seulement s'il existe une paire de Borel de G qui est conservée par ad_γ (la terminologie plus correcte est "quasi-semi-simple" ; en vertu de l'hypothèse "θ^* est d'ordre fini" que l'on imposera dès 1.5, on peut aussi bien abandonner le "quasi"). Supposons γ semi-simple. On dit qu'il est fortement régulier si et seulement si $Z_G(\gamma)$ est abélien et la composante neutre G_γ est un tore. On note $\tilde{G}_{ss}$ l'ensemble des éléments semi-simples et $\tilde{G}_{reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples et fortement réguliers.

Soient $\mathcal{E} = (B,T,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ une paire de Borel épinglée et $\gamma \in \tilde{G}$ tel que ad_γ conserve (B,T). On pose $\theta = \theta_{\mathcal{E}}$. On a

(1) pour tout $e \in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$, il existe $t \in T$ tel que $\gamma = te$;

(2) une paire de Borel (B',T') de G est conservée par ad_γ si et seulement s'il existe $\omega \in W^\theta$ et $x \in G_\gamma$ tels que $(B',T') = ad_x \circ \omega(B,T)$.

Preuve. Il existe $t \in G$ tel que $\gamma = te$. Puisque ad_γ et ad_e conservent (B,T), ad_t aussi donc t appartient à T. Pour $\omega \in W^\theta$, on relève ω grâce à 1.2(2) en un élément $n \in G_e$ qui normalise $T^{\theta,0}$, donc aussi son commutant T. La paire $\omega(B,T) = ad_n(B,T)$

est conservée par ad_e. Elle l'est aussi par $t \in T = ad_n(T)$, donc elle est conservée par ad_γ. Pour $x \in G_\gamma$, la paire $ad_x \circ \omega(B,T)$ l'est aussi. Inversement, soit (B',T') une paire conservée par ad_γ. D'après [KS1] théorème 1.1.A, le couple $(B' \cap G_\gamma, T' \cap G_\gamma)$ est une paire de Borel de G_γ. Il existe donc $x \in G_\gamma$ tel que l'image de cette paire par ad_x ait pour tore maximal $T^{\theta,0}$. Quitte à remplacer (B',T') par $ad_x(B',T')$, on peut supposer $T' = T$. Cette paire est alors conservée par ad_t, donc aussi par ad_e. Par le même argument, le couple $(B' \cap G_e, T^{\theta,0})$ est une paire de Borel de G_e. Grâce à 1.2(2), il existe $\omega \in W^\theta$ tel que $(B' \cap G_e, T^{\theta,0})$ se déduise de $(B \cap G_e, T^{\theta,0})$ par l'action de ω. Autrement dit, (B',T) et $(\omega(B),T)$ ont même intersection avec G_e. Or, parce que ad_e conserve un épinglage, cette opération d'intersection avec G_e est une bijection entre les paires de Borel de G conservées par ad_e et les paires de Borel de G_e, cf. [KS1] p.14. Donc $(B',T) = (\omega(B),T)$. $\square$

Notons $p : T \to T/(1-\theta)(T)$ l'homomorphisme naturel. Le groupe W^θ agit sur sur le quotient $T/(1-\theta)(T)$. Supposons T défini sur F et $\gamma \in \tilde{G}(F)$. Alors θ est défini sur F. Ecrivons $\gamma = te$ comme en (1). Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, on introduit un élément $u_{\mathcal{E}}(\sigma) \in G_{SC}$ comme en 1.2. On a

(3) $u_{\mathcal{E}}(\sigma)$ normalise T et son image dans W appartient à W^θ ;

(4) il existe $z(\sigma) \in Z(G)$ tel que $u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(e)u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1} = z(\sigma)^{-1}e$ et $\sigma \circ p(t) = p(z(\sigma)t)$.

Preuve. La paire $(\sigma(B),T)$ est conservée par ad_γ, donc aussi par ad_e. Cela entraîne comme ci-dessus qu'elle se déduit de (B,T) par l'action d'un élément de W^θ. Or $(B,T) = ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}(\sigma(B),T)$, d'où (3). On peut écrire $u_{\mathcal{E}}(\sigma) = n(\sigma)t(\sigma)$ où $t(\sigma) \in T$ et $n(\sigma) \in G_e$. L'élément $u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(e)u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$ appartient encore à $Z(\tilde{G},\mathcal{E})$, donc est de la forme $z(\sigma)^{-1}e$, avec $z(\sigma) \in Z(G)$. On obtient l'égalité $\sigma(e) = (\theta-1)(t(\sigma))z(\sigma)^{-1}e$. Puisque $\gamma = te$ et $\sigma(\gamma) = \gamma$, on a aussi $\sigma(t) = z(\sigma)(1-\theta)(t(\sigma))t$, donc $\sigma \circ p(t) = p(z(\sigma)t)$. $\square$

Levons les hypothèses précédentes et supposons γ fortement régulier. Alors

(5) $p(t)$ est régulier au sens que son fixateur dans W^θ est réduit à l'unité.

Preuve. Soit $\omega \in W^\theta$ qui fixe $p(t)$. On peut relever ω en un élément $n \in G_e$. L'égalité $\omega \circ p(t) = p(t)$ signifie qu'il existe $t' \in T$ tel que $t'ntn^{-1}\theta(t')^{-1} = t$. Mais alors $t'n\gamma(t'n)^{-1} = \gamma$ donc $t'n \in Z_G(\gamma)$. Puisque γ est fortement régulier, $Z_G(\gamma) = T^\theta$ et cela entraîne $\omega = 1$. $\square$

Remarquons que si $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$, T est uniquement déterminé par γ et est défini sur F : c'est le commutant dans G de G_γ.

Soit (B,T) une paire de Borel de G. Soit $\tilde{T}$ le normalisateur commun de B et T. Nous dirons que $\tilde{T}$ est un tore tordu maximal de $\tilde{G}$ si T est défini sur F (mais pas forcément B) et $\tilde{T} \cap \tilde{G}(F)$ est non vide. Dans ce cas, $\tilde{T}$ est aussi défini sur F. Pour un tel tore tordu, notons θ l'automorphisme ad_γ de T pour un élément quelconque $\gamma \in \tilde{T}$. On dit que $\tilde{T}$ est elliptique si et seulement si le plus grand sous-tore déployé de $T^{\theta,0}$ est $A_{\tilde{G}}$.

1.4 L-groupes

Désormais, F sera soit un corps local, soit un corps de nombres. On note W_F son groupe de Weil. Via l'homomorphisme naturel de W_F dans Γ_F, le groupe W_F agit sur tout ensemble sur lequel agit Γ_F.

Soit $\hat{G}$ le groupe dual de G. Rappelons ce que cela signifie. C'est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{C}$. On définit comme en 1.2 <u>sa</u> paire de Borel épinglée $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = (\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{T}}, (\hat{\mathbf{E}}_\alpha)_{\alpha \in \hat{\Delta}})$. Des isomorphismes en dualité $X_*(T^*) \simeq X^*(\hat{\mathbf{T}})$, $X^*(T^*) \simeq X_*(\hat{\mathbf{T}})$ sont donnés, qui échangent ensembles de racines et ensembles de coracines et respectent les ordres définis par B^* et $\hat{\mathbf{B}}$. Le groupe $\hat{G}$ est muni d'une action algébrique de Γ_F notée $w \mapsto w_G$. Il en résulte une action sur $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$. On suppose que les isomorphismes ci-dessus sont équivariants pour les actions galoisiennes. On suppose de plus que $\hat{G}$ possède une paire de Borel épinglée qui est conservée par l'action galoisienne. On note ${}^LG$ le produit semi-direct $\hat{G} \rtimes W_F$.

Par dualité, il se déduit de θ^* un automorphisme $\hat{\theta}$ de $\hat{\mathbf{T}}$. Soulignons que $\theta^* \mapsto \hat{\theta}$ est bien une dualité, c'est-à-dire est contravariante. Identifions $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ à une paire de Borel épinglée de $\hat{G}$ conservée par l'action galoisienne. Alors $\hat{\theta}$ se prolonge de façon unique en un automorphisme $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\hat{G}$ qui préserve cette paire. L'automorphisme $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ commute à l'action de Γ_F. Remarquons que l'ensemble $\hat{G}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est naturellement un espace tordu sous $\hat{G}$, défini sur $\mathbb{C}$. Cela nous permet d'utiliser pour lui les notations et terminologie introduites pour $\tilde{G}$. On peut aussi introduire l'espace ${}^L\tilde{G} = {}^LG\hat{\boldsymbol{\theta}}$ qui est, en un sens convenable, un espace tordu sous ${}^LG$.

Il est gênant de se limiter aux paires de Borel épinglées de $\hat{G}$ conservées par l'action galoisienne, l'ensemble de ces paires n'étant pas invariant par conjugaison. On peut s'affranchir de cette limitation de la façon suivante. Soit $\hat{\mathcal{E}}$ une paire de Borel épinglée quelconque de $\hat{G}$. On choisit $y \in \hat{G}_{SC}$ (le revêtement simplement connexe de $\hat{G}$) tel que $ad_{y^{-1}}(\hat{\mathcal{E}})$ soit la paire que l'on a fixée ci-dessus. On définit une nouvelle action de Γ_F sur $\hat{G}$ par $w \mapsto ad_y w_G ad_{y^{-1}}$. Elle conserve $\hat{\mathcal{E}}$. Le groupe ${}^LG$ est encore le produit semi-direct $\hat{G} \rtimes W_F$ pour cette nouvelle action : on envoie (g, w) sur $(gw_G(y)y^{-1}, w)$. On pose $\hat{\theta} = y\hat{\boldsymbol{\theta}}y^{-1} \in {}^L\tilde{G}$. L'automorphisme déduit de $\hat{\theta}$ (que l'on note encore $\hat{\theta}$) conserve $\hat{\mathcal{E}}$, commute à la nouvelle action galoisienne et on a l'égalité $\hat{G}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{G}\hat{\theta}$. Ces définitions dépendent du choix de y qui n'est déterminé que modulo $Z(\hat{G}_{SC})$, mais ce choix s'avérera sans importance. Ainsi, pour une paire $\hat{\mathcal{E}}$ fixée, on choisira y, on définira $\hat{\theta}$ comme ci-dessus et une action galoisienne, que l'on notera encore $w \mapsto w_G$ en espérant que cela ne crée pas d'ambiguïté.

1.5 Données endoscopiques

Pour la suite de l'article, F est un corps local de caractéristique nulle, G est un groupe réductif connexe et $\tilde{G}$ est un espace tordu sous G, tous deux définis sur F. On fixe de plus une classe de cohomologie $\mathbf{a} \in H^1(W_F, Z(\hat{G}))$. D'après un théorème de Langlands, ce groupe de cohomologie s'envoie surjectivement, et même bijectivement si $F \neq \mathbb{R}$, sur le groupe des caractères continus de $G(F)$ (on rappellera cette correspondance en 1.13). On note ω le caractère de $G(F)$ associé à $\mathbf{a}$. On impose les hypothèses suivantes :

• $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$;

• θ^* est d'ordre fini.

On peut aussi imposer l'hypothèse

• ω est trivial sur $Z(G; F)^\theta$,

sinon toute la théorie est vide. Mais, parce que cette hypothèse n'est pas stable par passage à un groupe de Levi, il vaut mieux ne pas l'imposer.

Une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est un triplet $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ vérifiant les conditions qui suivent. Le terme G' est un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur F. Le terme $\tilde{s}$ est un élément semi-simple de $\hat{G}\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Le terme $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe fermé de ${}^LG$. On suppose que $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}_{\tilde{s}}$ (composante neutre du commutant de $\tilde{s}$). On a donc une suite :

$$1 \to \hat{G}_{\tilde{s}} \to \mathcal{G}' \to W_F \to 1,$$

où la troisième flèche est la restriction de la projection naturelle de ${}^LG$ sur W_F. On suppose que cette suite est exacte et scindée, c'est-à-dire qu'il existe une section $W_F \to \mathcal{G}'$ qui soit un homomorphisme continu. Fixons une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}' = (\hat{B}', \hat{T}', (\hat{E}'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Delta'})$ de $\hat{G}_{\tilde{s}}$. Pour $w \in W_F$, on peut choisir $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_w} conserve cette paire. L'application $w \mapsto w_{G'} = ad_{g_w}$ s'étend en une action galoisienne de Γ_F sur $\hat{G}_{\tilde{s}}$. On suppose que $\hat{G}_{\tilde{s}}$ muni de cette action est un groupe dual de G'. Cela nous autorise à noter $\hat{G}_{\tilde{s}} = \hat{G}'$. On suppose enfin qu'il existe un cocycle $a : W_F \to Z(\hat{G})$, dont la classe est $\mathbf{a}$, tel que pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$, on ait l'égalité

$$ad_{\tilde{s}}(g, w) = (a(w)g, w).$$

Soient $\mathbf{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $\mathbf{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux données comme ci-dessus. Une équivalence entre ces données est un élément $x \in \hat{G}$ tel que $x\mathcal{G}'_1 x^{-1} = \mathcal{G}'_2$ et $x\tilde{s}_1 x^{-1} \in Z(\hat{G})\tilde{s}_2$. De $ad_x^{-1} : \hat{G}'_2 \to \hat{G}'_1$ se déduit par dualité un automorphisme $\alpha_x : G'_1 \to G'_2$ défini sur F, ou plus exactement une classe de tels isomorphismes modulo l'action de l'un ou l'autre des groupes $G'_{1,AD}(F)$ ou $G'_{2,AD}(F)$. En particulier, pour une seule donnée $\mathbf{G}'$, on note $Aut(\mathbf{G}')$ le groupe de ses automorphismes, c'est-à-dire des équivalences entre cette donnée et elle-même. Ce groupe contient $\hat{G}'$. Notons $Out(\mathbf{G}')$ le sous-groupe formé des α_x dans le groupe $Out(G')$ des automorphismes extérieurs de G'. On a une suite exacte ([KS1] p.19)

$$1 \to (Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{G}'))^{\Gamma_F} \to Aut(\mathbf{G}')/\hat{G}' \to Out(\mathbf{G}') \to 1.$$

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Fixons une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\hat{G}$ telle que $ad_{\tilde{s}}$ conserve $\hat{B}$ et $\hat{T}$. Posons $\hat{B}' = \hat{B} \cap \hat{G}'$, $\hat{T}' = \hat{T} \cap \hat{G}'$ et complétons $(\hat{B}', \hat{T}')$ en une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}' = (\hat{B}', \hat{T}', (\hat{E}'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Delta'})$ de $\hat{G}'$. Ainsi qu'on l'a expliqué en 1.4, en référence à la paire $\hat{\mathcal{E}}$, on modifie l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ de Γ_F sur $\hat{G}$, on modifie l'isomorphisme ${}^LG \simeq \hat{G} \rtimes W_F$ et on définit l'élément $\hat{\theta} \in \hat{G}\hat{\boldsymbol{\theta}}$. On peut écrire $\tilde{s} = s\hat{\theta}$, avec $s \in \hat{T}$. On construit comme ci-dessus l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}'$. On a l'égalité $\hat{T}' = \hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Cette égalité identifie le groupe de Weyl W' de $\hat{G}'$ (ou G') à un sous-groupe des éléments invariants par $\hat{\theta}$ du groupe de Weyl de $\hat{G}$, lequel s'identifie par dualité à W^{θ^*}. Le plongement $\hat{\xi} : \hat{T}' \subset \hat{T}$ n'est pas équivariant pour les actions galoisiennes. Il existe un cocycle $\omega_{G'} : \Gamma_F \to W^{\theta^*}$ tel que $\omega_{G'}(\sigma) \circ \sigma(\hat{\xi}) = \hat{\xi}$. Remarquons que le groupe $Z(\hat{G}) \cap \hat{G}'$ qui intervient dans la suite exacte ci-dessus est égal à $Z(\hat{G}) \cap T^{\hat{\theta},0}$. Introduisons <u>la</u> paire de Borel épinglée $\mathcal{E}'^* = (B'^*, T'^*, (E'^*_{\alpha'})_{\alpha' \in \Delta'})$ de G'. Les tores $\hat{T}$ et $\hat{T}'$ sont duaux de T^* et T'^*. Le tore $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ est dual de $T^*/(1-\theta^*)(T^*)$. Du plongement $\hat{\xi}$ se déduit par dualité un homomorphisme

$$\xi : T^* \to T^*/(1-\theta^*)(T^*) \simeq T'^*.$$

Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on a l'égalité $\sigma(\xi) = \xi \circ \omega_{G'}(\sigma)$.

Les constructions ci-dessus dépendent du choix de la paire $\hat{\mathcal{E}}$. La plupart du temps, pour une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ fixée, on supposera choisie une telle paire et on utilisera ces constructions sans plus de commentaires.

1.6 Systèmes de racines

Notons $\Sigma(T^*)$ l'ensemble des racines de T^* dans l'algèbre de Lie de G, $\Sigma(\hat{T})$ celui des racines de $\hat{T}$ dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}$ et $\check{\Sigma}(T^*)$, $\check{\Sigma}(\hat{T})$ les ensembles de coracines. Par les isomorphismes $X_*(T^*) \simeq X^*(\hat{T})$, $X^*(T^*) \simeq X_*(\hat{T})$, l'ensemble $\Sigma(T^*)$ s'identifie à $\check{\Sigma}(\hat{T})$ et $\check{\Sigma}(T^*)$ s'identifie à $\Sigma(\hat{T})$. On note $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ la bijection de $\Sigma(T^*)$ sur $\Sigma(\hat{T})$ telle que, par les identifications précédentes, $\hat{\alpha}$ s'identifie à la coracine $\check{\alpha}$. Pour $\alpha \in \Sigma(T^*)$, on note $N\alpha$ la somme des éléments de l'orbite de α sous l'action du groupe d'automorphismes engendré par θ^*. On note α_{res} la restriction de α à $T^{*,\theta^*,0}$. On pose $\Sigma(T^*)_{res} = \{\alpha_{res}; \alpha \in \Sigma(T^*)\}$. De même, pour $\alpha \in \Sigma(\hat{T})$, on note $N\alpha$ la somme des éléments de l'orbite de α sous l'action du groupe d'automorphismes engendré par $\hat{\theta}$. On note α_{res} la restriction de α à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. On pose $\Sigma(\hat{T})_{res} = \{\alpha_{res}; \alpha \in \Sigma(\hat{T})\}$. Les ensembles $\Sigma(T^*)_{res}$ et $\Sigma(\hat{T})_{res}$ sont des systèmes de racines non réduits en général. On dit que $\alpha \in \Sigma(T^*)$ est de type 1 si ni $\alpha_{res}/2$, ni $2\alpha_{res}$ n'appartiennent à $\Sigma(T^*)_{res}$, de type 2 si $2\alpha_{res} \in \Sigma(T^*)_{res}$ et de type 3 si $\alpha_{res}/2 \in \Sigma(T^*)_{res}$. On définit de même le type d'une racine $\alpha \in \Sigma(\hat{T})$. Pour $\alpha \in \Sigma(T^*)$, l'élément $\hat{\alpha} \in \Sigma(\hat{T})$ est de même type que α.

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. L'ensemble $\Sigma(\hat{T}')$ des racines de $\hat{T}'$ dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}'$ est formé des α_{res} pour $\alpha \in \Sigma(\hat{T})$ telles que

$$N\alpha(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \text{ est de type 1 ou 2} \\ -1, & \text{si } \alpha \text{ est de type 3.} \end{cases}$$

(on rappelle que $\tilde{s} = s\hat{\theta}$). Par composition avec l'homomorphisme ξ, l'ensemble $\Sigma(T'^*)$ des racines de T'^* dans l'algèbre de Lie de G' s'identifie à un ensemble de caractères de T^*. D'après [KS1] 1.3.9, c'est l'ensemble suivant :

$$\{N\alpha; \alpha \in \Sigma(T^*) \text{ de type } 1\ , N\hat{\alpha}(s) = 1\}$$
$$\cup\{2N\alpha; \alpha \in \Sigma(T^*) \text{ de type } 2\ , N\hat{\alpha}(s) = 1\}$$
$$\cup\{N\alpha; \alpha \in \Sigma(T^*) \text{ de type } 3\ , N\hat{\alpha}(s) = -1\}.$$

1.7 Espace endoscopique tordu

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique. On a

(1) $\xi(Z(G)) \subset Z(G')$.

Preuve. Pour $z \in Z(G)$, on a $\alpha(z) = 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma(T^*)$. A fortiori $N\alpha(z) = 1$. Pour toute racine $\alpha' \in \Sigma(T'^*)$, il existe $\alpha \in \Sigma(T^*)$ telle que $\alpha' \circ \xi = N\alpha$ ou $2N\alpha$. Donc $\alpha'(\xi(z)) = 1$ pour tout $\alpha' \in \Sigma(T'^*)$ et cela équivaut à $\xi(z) \in Z(G')$. $\square$

La restriction de ξ à $Z(G)$ se quotiente évidemment en un homomorphisme $\xi_{\mathcal{Z}}$: $\mathcal{Z}(G) \to Z(G')$. On vérifie que celui-ci est équivariant pour les actions galoisiennes. On pose $\tilde{G}' = G' \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$, c'est-à-dire le quotient de $G' \times \mathcal{Z}(\tilde{G})$ par la relation d'équivalence $(g'\xi_{\mathcal{Z}}(z), \tilde{z}) \equiv (g', z\tilde{z})$ pour $z \in \mathcal{Z}(G)$. Les actions à droite et à gauche de G' sur $G' \times \mathcal{Z}(\tilde{G})$ se descendent en des actions à droite et à gauche sur $\tilde{G}'$. L'action galoisienne sur $G' \times \mathcal{Z}(\tilde{G})$ se descend aussi en une action sur $\tilde{G}'$. On voit que $\tilde{G}'$ est un espace tordu sur G', défini sur F.

Remarques. (2) L'ensemble $\tilde{G}'(F)$ peut être vide. Par exemple, soient $d \in F^\times$, $G = SL(2)$, $\tilde{G} = \{\gamma \in GL(2); det(\gamma) = d\}$ et $\mathbf{a} = 1$. Pour toute extension quadratique E de F, il y a une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ telle que $G'(F)$ est le groupe des éléments de E de norme 1. Alors $\tilde{G}'(F)$ est l'ensemble des éléments de E de norme d. On peut trouver choisir d et E de sorte que cet ensemble soit vide.

(3) $\tilde{G}'$ est à torsion intérieure.

Cas particulier. On dira que $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure si G est quasi-déployé sur F, $\tilde{G}$ est à torsion intérieure et $\mathbf{a} = 1$. Dans ce cas, on a $\hat{\boldsymbol{\theta}} = 1$ et la donnée $\mathbf{G} = (G, {}^L G, \tilde{s} = 1)$ est une donnée endoscopique "maximale". L'espace endoscopique que l'on en déduit est bien sûr l'espace $\tilde{G}$ lui-même. Remarquons que, pour toute donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$, le couple $(G', \tilde{G}')$ complété par le cocycle trivial est quasi-déployé et à torsion intérieure.

1.8 Correspondance entre classes de conjugaison semi-simples

Soit $\gamma \in \tilde{G}_{ss}$. Par définition des éléments semi-simples, on peut fixer une paire de Borel (B, T) de G qui est conservée par ad_γ. On la complète en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$. On identifie cette paire à $\mathcal{E}^*$. D'après 1.3(1), on peut écrire $\gamma = te$, avec $t \in T$ et $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$. Soit $\bar{t}$ l'image de t dans $(T^*/(1-\theta^*)(T^*))/W^{\theta^*}$, $\bar{e}$ l'image de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ et $\bar{\gamma}$ l'image de $(\bar{t}, \bar{e})$ dans $((T^*/(1-\theta^*)(T^*))/W^{\theta}) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$. Montrons que :

(1) l'élément $\bar{\gamma}$ ne dépend pas des choix ; l'application $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ se quotiente en une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}$ sur $((T^*/(1-\theta^*)(T^*))/W^{\theta^*}) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$; cette bijection est définie sur F.

Preuve. Pour $\mathcal{E}$ fixée, on peut remplacer (t, e) par $(tz, z^{-1}e)$, avec $z \in Z(G)$. Cela remplace $(\bar{t}, \bar{e})$ par $(\bar{t}\bar{z}, \bar{z}^{-1}\bar{e})$, où $\bar{z}$ est l'image de z dans $\mathcal{Z}(G)$, et cela ne change pas $\bar{\gamma}$. Laissons fixée (B, T), mais changeons d'épinglage. La nouvelle paire de Borel épinglée $\mathcal{E}'$ se déduit de $\mathcal{E}$ par ad_y pour un $y \in T$. Posons $e' = ad_y(e)$. On a $e' \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}')$ et $e' = (1-\theta)(y)e$ où $\theta = \theta_{\mathcal{E}} = \theta_{\mathcal{E}'}$. On peut écrire $\gamma = t'e'$ avec $t' = (\theta-1)(y)t$. On voit que $\bar{t'} = \bar{t}$ et $\bar{e'} = \bar{e}$. Donc $\bar{\gamma}$ ne change pas. Remplaçons (B, T) par une autre paire (B', T) de même tore. Comme on l'a vu dans la preuve de 1.3(2), la paire (B', T) se déduit de (B, T) par l'action d'un élément de W^θ, que l'on peut représenter par un élément $n \in G_e$. Posons $\mathcal{E}' = ad_n(\mathcal{E})$. Alors e appartient à $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}')$ et on peut changer $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$ tout en conservant la décomposition $\gamma = te$. Parce que e est fixe par ad_n, son image dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ est la même, que la paire de référence soit $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}'$. Les identifications de T à T^* relatives aux deux paires $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ diffèrent par l'action d'un élément de W^{θ^*}, donc les applications composées $T \to (T^*/(1-\theta^*)(T^*))/W^{\theta^*}$ sont les mêmes et $\bar{t}$ ne change pas quand on remplace $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}'$. Donc $\bar{\gamma}$ ne change pas non plus. Remplaçons maintenant (B, T) par une paire quelconque (B', T'). D'après la preuve de 1.3(2), il existe $g \in G_\gamma$ tel que $ad_g(T) = T'$. L'étape précédente nous permet de changer B de sorte que l'on ait aussi $ad_g(B) = B'$. On choisit alors $\mathcal{E}' = ad_g(\mathcal{E})$ et pour décomposition $\gamma = t'e'$, avec $t' = ad_g(t)$ et $e' = ad_g(e)$. Les diverses applications relatives à $\mathcal{E}'$ sont les composées des applications relatives à $\mathcal{E}$ avec ad_g^{-1}. Donc $\bar{\gamma}$ ne change pas. Cela prouve la première assertion. La deuxième est facile. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. On utilise une paire $\mathcal{E}$ pour calculer $\bar{\gamma}$ et la paire $\sigma(\mathcal{E})$ pour calculer $\overline{\sigma(\gamma)}$. D'une décomposition $\gamma = te$ se déduit la décomposition $\sigma(\gamma) = \sigma(t)\sigma(e)$. On a $\overline{\sigma(t)} = \sigma_{G^*}(\bar{t})$ et $\overline{\sigma(e)} = \sigma_{G^*}(\bar{e})$ par définition des actions galoisiennes sur T^* et $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. Donc $\overline{\sigma(\gamma)}$ est bien l'image de $\bar{\gamma}$ par l'action σ_{G^*}. $\square$

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Les classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}'$ sont de même paramétrées par $(T'^*/W^{G'}) \times_{\mathcal{Z}(G')} \mathcal{Z}(\tilde{G}')$. On a $\mathcal{Z}(G') = Z(G')$ et, par construction, $\mathcal{Z}(\tilde{G}') = Z(G') \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$. Donc

$$(T'^*/W^{G'}) \times_{\mathcal{Z}(G')} \mathcal{Z}(\tilde{G}') = (T'^*/W^{G'}) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G}).$$

En utilisant l'isomorphisme $T' \simeq T^*/(1-\theta^*)(T^*)$ par lequel $W^{G'}$ s'identifie à un sous-groupe de W^{θ^*}, on obtient une surjection

$$(T'^*/W^{G'}) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G}) \to ((T^*/(1-\theta^*)(T^*))/W^{\theta^*}) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G}),$$

c'est-à-dire une surjection de l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}'$ sur l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}$. Cette application est définie sur F.

Remarque. Restreinte aux éléments invariants par Γ_F, l'application n'est plus surjective en général. D'autre part, une classe de conjugaison semi-simple dans $\tilde{G}$ peut être définie sur F sans contenir d'élément de $\tilde{G}(F)$.

On dit qu'un élément de $\tilde{G}'_{ss}$ est $\tilde{G}$-fortement régulier si et seulement si l'image de sa classe de conjugaison par l'application ci-dessus est une classe de conjugaison dans $\tilde{G}$ formée d'éléments fortement réguliers.

On note $\mathcal{D}(\mathbf{G}')$ l'ensemble des couples $(\delta,\gamma) \in \tilde{G}'(F) \times \tilde{G}(F)$ formés d'éléments semi-simples dont les classes de conjugaison (sur $\bar{F}$) se correspondent et tels que γ est fortement régulier dans $\tilde{G}$. On dit que $\mathbf{G}'$ est "relevant" si $\mathcal{D}(\mathbf{G}')$ n'est pas vide.

1.9 Remarques sur le cas quasi-déployé et à torsion intérieure

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. L'ensemble $Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ attaché à une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ est en fait indépendant de $\mathcal{E}$: c'est l'ensemble des $e \in \tilde{G}$ tels que ad_e soit l'identité. L'ensemble $Z(\tilde{G})$ s'identifie donc à ce même ensemble.

Soit $\mathbf{G}' = (G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$.

Lemme. *Supposons $\tilde{G}'(F) \neq \emptyset$. Alors l'ensemble des éléments $\tilde{G}$-fortement réguliers de $\tilde{G}'(F)$ n'est pas vide et, pour tout élément δ de cet ensemble, il existe $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$ tel que $(\delta,\gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}')$. A fortiori, $\mathbf{G}'$ est relevant.*

Preuve. Puisque $\tilde{G}'(F)$ n'est pas vide, le sous-ensemble $\tilde{G}'_{ss}(F)$ ne l'est pas non plus : la partie semi-simple d'un élément de $\tilde{G}'(F)$ appartient à cet ensemble. Soit $\epsilon \in \tilde{G}'_{ss}(F)$. Fixons un tore maximal T' de G'_ϵ défini sur F. Pour $t' \in T'(F)$ en position générale, $t'\epsilon$ est $\tilde{G}$-fortement régulier. D'où la première assertion. Fixons maintenant un élément $\delta \in \tilde{G}'(F)$ qui soit $\tilde{G}$-fortement régulier. Fixons une paire de Borel (B',T') de G' qui soit conservée par ad_δ. On a $T' = G'_\delta$, donc T' est défini sur F. Soit (B^*,T^*) une paire de Borel de G définie sur F. Des deux paires de Borel se déduit un isomorphisme $\xi_{T^*,T'} : T^* \to T'$. Il existe un cocycle $\omega_{T'} : \Gamma_F \to W$ tel que $\xi \circ \omega_{T'}(\sigma) \circ \sigma = \sigma \circ \xi$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Puisque G est quasi-déployé, on peut appliquer le corollaire 2.2 de [K1] : il existe $g \in G(\bar{F})$ tel que $ad_{g^{-1}}(T^*)$ soit défini sur F et que, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, on ait l'égalité suivante sur T : $\omega_{T'}(\sigma)\circ\sigma\circ ad_g = ad_g\circ\sigma$. Posons $(B,T) = ad_{g^{-1}}(B^*,T^*)$. De (B,T) et (B',T') se déduit un isomorphisme $\xi_{T,T'} : T \to T'$ qui est maintenant équivariant pour les actions galoisiennes. On vérifie que $\xi_{T,T'}$ s'étend en un isomorphisme $\tilde{\xi}_{T,T'} : T \times_{Z(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G}) \to T' \times_{Z(G')} \mathcal{Z}(\tilde{G}')$ qui est encore équivariant pour les actions galoisiennes. L'élément δ appartient à l'ensemble d'arrivée. Soit γ son image réciproque par $\tilde{\xi}_{T,T'}$. Puisque $\tilde{\xi}_{T,T'}$ est équivariant pour les actions galoisiennes, γ appartient à $\tilde{G}(F)$ et il est clair que (δ,γ) appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{G}')$. $\square$

1.10 Correspondance entre éléments semi-simples

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Appelons diagramme un sextuplet $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ vérifiant les conditions (1) à (6) suivantes :

(1) $\epsilon \in \tilde{G}'_{ss}(F)$ et $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$;

(2) (B', T') est une paire de Borel de G' et (B, T) est une paire de Borel de G ;

(3) ad_ϵ conserve (B', T') et ad_η conserve (B, T) ;

(4) T et T' sont définis sur F.

A l'aide de (B', T'), resp. (B, T), on identifie T' à T'^* et T à T^*. L'homomorphisme ξ se transforme en un homomorphisme $\xi_{T,T'} : T \to T'$.

(5) L'homomorphisme $\xi_{T,T'}$ est défini sur F.

Complétons (B, T) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$, écrivons $\eta = te$, avec $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ et $t \in T$, cf. 1.3(1). Notons e' l'image de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$. L'élément $\xi_{T,T'}(t)e'$ de $\tilde{G}'$ ne dépend pas de ces choix : la preuve de cette assertion est contenue dans celle de 1.8(1). Alors

(6) pour de quelconques choix comme ci-dessus, $\epsilon = \xi_{T,T'}(t)e'$.

Remarque. Soit un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ et soit B'_1 un sous-groupe de Borel de G' contenant T'. Il existe un unique élément w du groupe de Weyl $W^{G'}$ de G' relativement à T' tel que $B'_1 = w(B')$. Cet élément s'identifie à un élément de W (le groupe de Weyl de G relativement à T) qui est invariant par $\theta = \theta_e$ pour e comme ci-dessus. Posons $B_1 = w(B)$. Alors $(\epsilon, B'_1, T', B_1, T, \eta)$ est encore un diagramme.

Pour ϵ et η vérifiant (1), on dit que ϵ et η se correspondent si et seulement s'il existe un diagramme joignant ϵ à η. Il est clair que si ϵ et η se correspondent, les classes de conjugaison sur $\bar{F}$ de ϵ et η se correspondent. La réciproque est fausse en général, c'est-à-dire que, si les classes de conjugaison sur $\bar{F}$ de ϵ et η se correspondent, il n'existe pas toujours de diagramme joignant ϵ et η. Le lemme suivant précise ce point.

Lemme. *(i) Soit $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}')$. Alors il existe un diagramme $(\delta, B', T', B, T, \gamma)$.*

(ii) Soient $\epsilon \in \tilde{G}'_{ss}(F)$ et $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$. Alors ces deux éléments se correspondent si et seulement si (ϵ, η) appartient à l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbf{G}')$.

Preuve. (i) On fixe (B', T') et (B, T) tels que (3) soit vérifiée (pour $\epsilon = \delta$, $\eta = \gamma$). Les tores T et T' sont uniquement déterminés puisque nos éléments sont fortement réguliers, donc (4) est vérifiée. On complète (B, T) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$. Il existe un cocyle $\omega_{T',T} : \Gamma_F \to W^\theta$ (où $\theta = \theta_{\mathcal{E}}$) tel que $\sigma_{T'} \circ \xi_{T,T'} = \xi_{T,T'} \circ \omega_{T',T}(\sigma) \circ \sigma_T$. On écrit $\gamma = te$, avec $t \in T$ et $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$. On peut aussi écrire $\delta = t'e'$ où $t' \in T'$ et e' est l'image de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$. L'hypothèse que les classes de conjugaison de δ et γ se correspondent signifie qu'il existe $w \in W^\theta$ tel que $\xi_{T,T'} \circ w(t) = t'$. On peut relever w en un élément n de $G_{SC,e}$ qui normalise T. Remplaçons $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}_1 = ad_{n^{-1}}(\mathcal{E})$. Cela remplace $\xi_{T,T'}$ par $\xi_{T,T',1} = \xi_{T,T'} \circ w$. On a alors $\xi_{T,T',1}(t) = t'$. En oubiant cette construction, on suppose $\xi_{T,T'}(t) = t'$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. D'après 1.3(4), il existe $z(\sigma) \in Z(G)$ tel que $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)} \circ \sigma(e) = z(\sigma)^{-1}e$ et l'image de $\sigma(t)$ dans $T/(1-\theta)(T)$ soit égale à celle de t multipliée par $z(\sigma)$ (en notant encore $z(\sigma)$ l'image de cet élément dans les divers quotients de $Z(G)$). La première relation entraîne $\sigma_{G^*}(\bar{e}) = z(\sigma)^{-1}\bar{e}$ (où $\bar{e}$ est l'image de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$) puis $\sigma_{G'}(e') = z(\sigma)^{-1}e'$. La seconde relation entraîne $\xi_{T,T'} \circ \sigma(t) = z(\sigma)\xi_{T,T'}(t) = z(\sigma)t'$. On a aussi

$$t'e = \delta = \sigma(\delta) = \sigma(t')\sigma(e') = \sigma(t')z(\sigma)^{-1}e',$$

d'où $\sigma(t') = z(\sigma)t'$. Alors $\xi_{T,T'} \circ \sigma(t) = \sigma \circ \xi_{T,T'}(t)$. Mais ce terme est aussi égal à $\xi_{T,T'} \circ \omega_{T',T}(\sigma) \circ \sigma(t)$. D'où $\omega_{T',T}(\sigma) = 1$ puisque γ est fortement régulier, cf. 1.3(5). Cela prouve (i).

(ii) Supposons que ϵ et η se correspondent. Fixons un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$. Soit $t \in T(F)$, posons $t' = \xi_{T,T'}(t)$. Alors $(t'\epsilon, B', T', B, T, t\eta)$ est encore un diagramme. Si t est en position générale, $t\eta$ est fortement régulier. Donc $(t'\epsilon, t\eta) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}')$. On peut choisir t aussi proche de 1 que l'on veut. Donc (ϵ, η) appartient à l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbf{G}')$. Inversement, supposons cette condition vérifiée. On fixe une suite d'éléments $(\delta_n, \gamma_n) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}')$, pour $n \in \mathbb{N}$, qui tend vers (ϵ, η). Les résultats usuels de la théorie de la descente valent dans le cas tordu. En notant par des lettres gothiques les algèbres de Lie, on peut fixer un voisinage $\mathfrak{u}_\eta$ de 0 dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$ de sorte que tout point assez voisin de η soit conjugué par un élément de $G(F)$ à un élément $exp(X)\eta$ où $X \in \mathfrak{u}_\eta$. On peut fixer un voisinage similaire $\mathfrak{u}_\epsilon$ de 0 dans $\mathfrak{g}'_\epsilon(F)$. Quitte à conjuguer nos éléments δ_n et γ_n et à supprimer un nombre fini de termes de la suite, on peut donc écrire $\delta_n = exp(Y_n)\epsilon$, $\gamma_n = exp(X_n)\eta$. Puisqu'il s'agit d'éléments semi-simples, les X_n et Y_n le sont aussi. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison par $G_\eta(F)$ de sous-tores maximaux de G_η définis sur F (et de même pour G'_ϵ), on peut, quitte à extraire une sous-suite, fixer de tels sous-tores maximaux $T^\natural \subset G_\eta$ et $T' \subset G'_\epsilon$ et supposer $X_n \in \mathfrak{t}^\natural(F)$, $Y_n \in \mathfrak{t}'(F)$. D'après (i), on peut fixer des diagrammes $(\delta_n, B'_n, T'_n, B_n, T_n, \gamma_n)$. Il n'y a pas le choix pour les tores : on a nécessairement $T'_n = T'$ tandis que T_n est le commutant de $T^\natural$ dans G. Puisque ces tores n'appartiennent qu'à un nombre fini de paires de Borel, on peut, quitte à extraire une sous-suite, fixer B contenant T et B' contenant T' et supposer que $B_n = B$ et $B'_n = B'$ pour tout n. Puisque $\gamma_n \in T(F)\eta$ et que ad_{γ_n} conserve (B, T), ad_η conserve aussi cette paire. On écrit $\eta = te$ comme au début du paragraphe, avec $t \in T$. De même, on peut écrire $\epsilon = t'e'$, où e' est l'image de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$ et $t' \in T'$. On a alors $\gamma_n = exp(X_n)te$, $\delta_n = exp(Y_n)t'e'$. D'après (6) appliqué au diagramme joignant δ_n et γ_n, on a $\xi_{T,T'}(exp(X_n)t) = exp(Y_n)t'$. Quand n tend vers l'infini, X_n et Y_n tendent vers 0. D'où $\xi_{T,T'}(t) = t'$. Mais alors $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ est un diagramme. Cela achève la preuve. $\square$

1.11 K-espaces

On suppose dans ce paragraphe $F = \mathbb{R}$. Considérons une famille finie $(G_p, \tilde{G}_p)_{p \in \Pi}$, où, pour tout p, G_p est un groupe réductif connexe sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{G}_p$ est un espace tordu sur G_p. On suppose données des familles $(\phi_{p,q})_{p,q \in \Pi}$, $(\tilde{\phi}_{p,q})_{p,q \in \Pi}$ et $(\nabla_{p,q})_{p,q \in \Pi}$. Pour $p, q \in \Pi$, $\phi_{p,q} : G_q \to G_p$ et $\tilde{\phi}_{p,q} : \tilde{G}_q \to \tilde{G}_p$ sont des isomorphismes compatibles définis sur $\mathbb{C}$ et $\nabla_{p,q} : \Gamma_\mathbb{R} \to G_{p,SC}$ est un cocycle. On suppose les hypothèses (1) à (5) vérifiées pour tous $p, q, r \in \Pi$ et $\sigma \in \Gamma_\mathbb{R}$:

(1) $\phi_{p,q} \circ \sigma(\phi_{p,q})^{-1} = ad_{\nabla_{p,q}(\sigma)}$ et $\tilde{\phi}_{p,q} \circ \sigma(\tilde{\phi}_{p,q})^{-1} = ad_{\nabla_{p,q}(\sigma)}$ (ce dernier automorphisme est l'action par conjugaison de $\nabla_{p,q}(\sigma)$ sur $\tilde{G}_p$) ;

(2) $\phi_{p,q} \circ \phi_{q,r} = \phi_{p,r}$ et $\tilde{\phi}_{p,q} \circ \tilde{\phi}_{q,r} = \tilde{\phi}_{p,r}$;

(3) $\nabla_{p,r}(\sigma) = \phi_{p,q}(\nabla_{q,r}(\sigma))\nabla_{p,q}(\sigma)$;

(4) $\tilde{G}_p(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Pour $x \in \tilde{G}_p(\mathbb{R})$, ad_x définit naturellement un automorphisme de $H^1(\Gamma_\mathbb{R}, G_p)$ qui ne dépend pas du choix de x. Conformément à nos conventions, on note cet automorphisme θ. Alors

(5) la famille $(\nabla_{p,q})_{q \in \Pi}$ s'envoie bijectivement sur $\pi(H^1(\Gamma_\mathbb{R}; G_{p,SC})) \cap H^1(\Gamma_\mathbb{R}; G_p)^\theta$.

Dans une telle situation, on définit le K-groupe KG comme la réunion disjointe des G_p pour $p \in \Pi$ et le K-espace tordu $K\tilde{G}$ comme la réunion disjointe des $\tilde{G}_p$. On introduit les sous-ensembles évidents $K\tilde{G}_{ss}$ et $K\tilde{G}_{reg}$. Pour $\gamma_p \in \tilde{G}_p$ et $\gamma_q \in \tilde{G}_q$, on dit que γ_p et γ_q sont conjugués si $\tilde{\phi}_{p,q}(\gamma_q)$ est conjugué à γ_p dans $\tilde{G}_p$.

Remarque. On adopte la terminologie K-groupe par commodité. Telle qu'on l'a définie, cette notion n'est pas intrinsèque aux groupes puisque la condition (5) dépend de l'espace tordu.

De $\phi_{p,q}$ se déduit une bijection $\mathcal{E}_q \mapsto \phi_{p,q}(\mathcal{E}_q)$ entre paires de Borel épinglées de G_q et G_p. Il s'en déduit une identification $\mathcal{E}_q^* \simeq \mathcal{E}_p^*$ équivariante pour les actions galoisiennes. Elle transporte l'automorphisme θ_q^* sur θ_p^*. On peut noter simplement $\mathcal{E}^*$ et θ^* ces objets. On supposera comme en 1.5 que θ^* est d'ordre fini. Les groupes G_p ont un L-groupe ${}^LG$ commun et un L-espace ${}^L\tilde{G}$ commun. La donnée d'un $\mathbf{a} \in H^1(W_{\mathbb{R}}; Z(\hat{G}))$ détermine des caractères ω_p de chaque $G_p(\mathbb{R})$. L'application $\tilde{\phi}_{p,q}$ se restreint en une bijection de $Z(\tilde{G}_q, \mathcal{E}_q)$ sur $Z(\tilde{G}_p, \phi_{p,q}(\mathcal{E}_q))$. Il s'en déduit une bijection $\mathcal{Z}(\tilde{G}_q) \simeq \mathcal{Z}(\tilde{G}_p)$ elle-aussi équivariante pour les actions galoisiennes.

Une donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ pour $(\tilde{G}_p, \mathbf{a})$ est aussi une donnée endoscopique pour $(\tilde{G}_q, \mathbf{a})$ pour tout q. Changer $(\tilde{G}_p, \mathbf{a})$ en $(\tilde{G}_q, \mathbf{a})$ ne change pas l'espace endoscopique $\tilde{G}'$. On peut donc considérer $\mathbf{G}'$ comme une donnée endoscopique pour $(K\tilde{G}, \mathbf{a})$. Pour chaque $p \in \Pi$, notons plus précisément $\mathcal{D}_{\tilde{G}_p}(\mathbf{G}')$ l'ensemble défini en 1.8 quand on considère $\mathbf{G}'$ comme une donnée endoscopique de $(\tilde{G}_p, \mathbf{a})$. On pose $\mathcal{D}_{K\tilde{G}}(\mathbf{G}') = \sqcup_{p \in \Pi} \mathcal{D}_{\tilde{G}_p}(\mathbf{G}')$.

Montrons qu'à partir d'un couple $(G, \tilde{G})$ vérifiant les conditions de 1.5, on peut construire un K-espace comme ci-dessus. On fixe un ensemble Π de cocycles $p : \Gamma_{\mathbb{R}} \to G_{SC}$ qui s'envoie bijectivement sur $\pi(H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}, G_{SC})) \cap H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}, G)^\theta$. Pour $p \in \Pi$, fixons un groupe G_p et un espace tordu $\tilde{G}_p$ sous ce groupe, tous deux définis sur $\mathbb{R}$, munis d'isomorphismes compatibles $\phi_p : G_p \to G$ et $\tilde{\phi}_p : \tilde{G}_p \to \tilde{G}$, définis sur $\mathbb{C}$, de sorte que, pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$, on ait les égalités $\phi_p \circ \sigma(\phi_p)^{-1} = ad_{p(\sigma)}$ et $\tilde{\phi}_p \circ \sigma(\tilde{\phi}_p)^{-1} = ad_{p(\sigma)}$. De tels objets existent : il suffit de poser $G_p = G$, $\tilde{G}_p = \tilde{G}$, de prendre pour ϕ_p et $\tilde{\phi}_p$ les identités et de définir les actions galoisiennes sur G_p et $\tilde{G}_p$ par les égalités précédentes. Pour $p, q \in \Pi$ et $\sigma \in G_{\mathbb{R}}$, on définit $\phi_{p,q} = \phi_p^{-1} \circ \phi_q$ et $\nabla_{p,q}(\sigma) = \phi_p^{-1}(q(\sigma)p(\sigma)^{-1})$. La vérification des propriétés (1) à (5) est routinière. Indiquons simplement la peuve de (4), qui justifie la condition d'invariance par θ imposée aux cocycles. Fixons $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. L'image de p dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}, G)$ est invariante par ad_γ. On peut donc fixer $g \in G$ tel que $ad_\gamma(p(\sigma)) = g^{-1}p(\sigma)\sigma(g)$ pour tout σ. Cela implique

$$\sigma(g\gamma) = \sigma(g)\gamma = p(\sigma)^{-1}g\gamma p(\sigma) = ad_{p(\sigma)^{-1}}(g\gamma).$$

Posons $\gamma_p = \phi_p^{-1}(g\gamma)$. Alors

$$\sigma(\gamma_p) = \sigma(\phi_p)^{-1}(\sigma(g\gamma)) = \sigma(\phi_p)^{-1} \circ ad_{p(\sigma)^{-1}}(g\gamma) = \phi_p^{-1}(g\gamma) = \gamma_p.$$

Donc $\gamma_p \in \tilde{G}_p(\mathbb{R})$.

Inversement, si on part de données comme ci-dessus et si on fixe un $p_0 \in \Pi$, on peut identifier $K\tilde{G}$ à un K-espace tordu défini comme on vient de le faire à partir du couple $(G, \tilde{G}) = (G_{p_0}, \tilde{G}_{p_0})$.

1.12 L'ensemble $\tilde{G}_{ab}(F)$

Le corps F est de nouveau un corps local de caractéristique nulle. Soit A un groupe et B un ensemble muni d'une action **à droite** de A. On suppose A et B munis d'actions de Γ_F compatibles à cette action. Notons $Z^{1,0}(\Gamma_F; A \circlearrowleft B)$ l'ensemble des couples (α, b) où $b \in B$ et $\alpha : \Gamma_F \to A$ est un cocycle tels que $\sigma(b) = b\alpha(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On introduit la relation d'équivalence $(\alpha, b) \equiv (\alpha', b')$ si et seulement s'il existe $a \in A$ tel que $\alpha'(\sigma) = a^{-1}\alpha(\sigma)\sigma(a)$ et $b' = ba$. On note $H^{1,0}(\Gamma_F; A \circlearrowleft B)$ le quotient de $Z^{1,0}(\Gamma_F; A \circlearrowleft B)$ par cette relation d'équivalence.

Il y a un cas particulier important de la construction précédente. Considérons deux groupes A et B munis d'actions de Γ_F et un homomorphisme de groupes $f : A \to B$ équivariant pour cette action. On peut considérer que A agit sur B par $(a, b) \mapsto bf(a)$. On note alors $H^{1,0}(\Gamma_F; A \xrightarrow{f} B)$ l'ensemble $H^{1,0}(\Gamma_F; A \circlearrowleft B)$ précédent. Si A et B sont abéliens, c'est aussi un groupe abélien.

Remarque. Ces ensembles ont été définis par divers auteurs. Fâcheusement, les uns les notent H^0, les autres H^1 et les définitions varient par des signes. Nous avons adopté la notation $H^{1,0}$ qui est lourde mais a l'avantage de mécontenter tout le monde. Labesse utilise la notation H^0 et sa définition diffère de la nôtre car il considère une action à gauche de A sur B. Kottwitz et Shelstad ne considèrent que des groupes abéliens et utilisent la notation H^1. A cette différence de notation près, notre définition est la même que la leur. Signalons que, sous certaines hypothèses topologiques supplémentaires, on peut définir comme ci-dessus des ensembles $H^{1,0}(W_F; A \xrightarrow{f} B)$, cf. [KS1] A.3.

Ainsi, on définit l'ensemble $G_{ab}(F) = H^{1,0}(\Gamma_F; G_{SC} \xrightarrow{\pi} G)$ (pour nous, G_{SC} agit à droite sur G), cf. [Lab1] 1.6. L'application naturelle de $H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G_{SC}) \xrightarrow{\pi} Z(G))$ dans cet ensemble $G_{ab}(F)$ est bijective, ce qui munit $G_{ab}(F)$ d'une structure de groupe. Il y a un homomorphisme naturel injectif

$$G(F)/\pi(G_{SC}(F)) \to G_{ab}(F),$$

qui est surjectif si $F \neq \mathbb{R}$.

Ainsi, on définit l'ensemble $H^{1,0}(\Gamma_F; G_{SC} \circlearrowleft \tilde{G})$, que l'on peut noter $\tilde{G}_{ab}(F)$. On a une application :

$$\begin{array}{ccc} Z^{1,0}(\Gamma_F; G_{SC} \circlearrowleft \tilde{G}) \times Z^{1,0}(\Gamma_F; Z(G_{SC}) \xrightarrow{\pi} Z(G)) & \to & Z^{1,0}(\Gamma_F; G_{SC} \circlearrowleft \tilde{G}) \\ ((\mu, \gamma), (\zeta, z)) & \mapsto & (\mu\zeta, \gamma z). \end{array}$$

Elle se quotiente en une action à droite du groupe $G_{ab}(F) \simeq H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G_{SC}) \xrightarrow{\pi} Z(G))$ sur $\tilde{G}_{ab}(F)$. On a :

(1) $\tilde{G}_{ab}(F)$ est un espace principal homogène sous $G_{ab}(F)$.

Preuve. Soient (ζ, z), (ζ', z') deux éléments de $Z^{1,0}(\Gamma_F; Z(G_{SC}) \xrightarrow{\pi} Z(G))$ et soit $(\mu, \gamma) \in Z^{1,0}(\Gamma_F; G_{SC} \circlearrowleft \tilde{G})$. Supposons $(\mu\zeta, \gamma z)$ cohomologue à $(\mu\zeta', \gamma z')$. Alors il existe $x \in G_{SC}$ tel que $\mu(\sigma)\zeta'(\sigma) = x^{-1}\mu(\sigma)\zeta(\sigma)\sigma(x)$ et $\gamma z' = \gamma z\pi(x)$. Cette dernière relation implique que $z' = z\pi(x)$ et que x appartient à $Z(G_{SC})$. La première relation implique alors que $\zeta'(\sigma) = x^{-1}\zeta(\sigma)\sigma(x)$, donc les couples (ζ, z) et (ζ', z') sont cohomologues. Cela prouve que l'action de $G_{ab}(F)$ sur $\tilde{G}_{ab}(F)$ est libre. Soient maintenant (μ, γ) et (μ', γ') deux éléments de $Z^{1,0}(\Gamma_F; G_{SC} \circlearrowleft \tilde{G})$. Soit $g \in G$ l'élément tel que $\gamma' = \gamma g$, écrivons $g = \pi(x)z$ avec $x \in G_{SC}$ et $z \in Z$. Le couple (μ', γ') est cohomologue à $(\mu'', \gamma z)$, où $\mu''(\sigma) = x\mu'(\sigma)\sigma(x)^{-1}$. Posons $\zeta(\sigma) = \mu(\sigma)^{-1}\mu''(\sigma)$. Les égalités $\sigma(\gamma) = \gamma\pi(\mu(\sigma))$ et

$\sigma(\gamma z)=\gamma z\pi(\mu''(\sigma))$ entraînent que $\sigma(z)=z\pi(\zeta(\sigma))$. Cela implique que $\zeta(\sigma)$ appartient à $Z(G_{SC})$. Cette propriété et le fait que μ et μ'' sont des cocycles implique que ζ est aussi un cocycle. Alors (ζ,z) appartient à $Z^{1,0}(\Gamma_F;Z(G_{SC})\stackrel{\pi}{\to}Z(G))$. Le couple (μ',γ') est cohomologue au produit de (μ,γ) et de (ζ,z). Cela prouve que l'action de $G_{ab}(F)$ sur $\tilde{G}_{ab}(F)$ est transitive. $\square$

Remarquons que l'on pourrait aussi bien définir une action à gauche de $G_{ab}(F)$ sur $\tilde{G}_{ab}(F)$, jouissant des mêmes propriétés.

Il y a une application naturelle $\tilde{G}(F)\to\tilde{G}_{ab}(F)$: à $\gamma\in\tilde{G}(F)$, on associe l'image dans $\tilde{G}_{ab}(F)$ de $(\mu=1,\gamma)\in Z^{1,0}(\Gamma_F;G_{SC}\circlearrowleft\tilde{G})$.

On va définir une application

$$(2)\qquad \tilde{G}_{ab}(F)\to H^{1,0}(\Gamma_F;\mathcal{Z}(G_{SC})\circlearrowleft\mathcal{Z}(\tilde{G})).$$

Soit $(\mu,\gamma)\in Z^{1,0}(\Gamma_F;G_{SC}\circlearrowleft\tilde{G})$. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ et une cochaîne $u_{\mathcal{E}}$ comme en 1.2. On peut choisir, et on choisit, $x\in G_{SC}$ et $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ tels que $\gamma=e\pi(x)$. Posons $\mu'(\sigma)=x\mu(\sigma)\sigma(x)^{-1}$, puis $\nu(\sigma)=ad_e^{-1}(u_{\mathcal{E}}(\sigma))\mu'(\sigma)u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$. L'égalité $\sigma(\gamma)=\gamma\pi(\mu(\sigma))$ entraîne $\sigma(e)=e\pi(\mu'(\sigma))$, puis

(3) $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}(\sigma(e))=e\pi(\nu(\sigma))$.

Or $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma$ conserve $\mathcal{E}$, donc aussi $Z(\tilde{G},\mathcal{E})=eZ(G)$. Donc $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}(\sigma(e))\in eZ(G)$ et l'égalité (3) implique que $\nu(\sigma)$ appartient à $Z(G_{SC})$. Rappelons que le cobord $du_{\mathcal{E}}$ prend ses valeurs dans $Z(G_{SC})$. Montrons que

(4) $d\nu=(\theta^{-1}-1)(du_{\mathcal{E}})$.

Pour cela, définissons un espace tordu $\tilde{G}_\star$ sur le groupe G_{SC} de la façon suivante. Il est égal à $e_\star G_{SC}$, où $e_\star$ est un point fixé. L'action de G_{SC} à droite est l'action naturelle, celle à gauche est définie par $ge_\star=e_\star ad_e^{-1}(g)$. La structure galoisienne est $(\sigma,e_\star g)\mapsto e_\star\mu'(\sigma)\sigma(g)$. On vérifie que cette définition est loisible. On a la relation analogue à (3) :

$$(5)\qquad ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}(\sigma(e_\star))=e_\star\nu(\sigma).$$

Soient $\sigma_1,\sigma_2\in\Gamma_F$. En remplaçant dans (5) σ par σ_1 et en multipliant à droite l'égalité obtenue par $\sigma_1(\nu(\sigma_2))$, on obtient

$$ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma_1)}(\sigma_1(e_\star\nu(\sigma_2)))=e_\star\nu(\sigma_1)\sigma_1(\nu(\sigma_2)),$$

puisque $\nu(\sigma_2)$ est central. On remplace le terme $e_\star\nu(\sigma_2)$ du membre de gauche par sa valeur donnée par (5) et on obtient

$$ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma_1)\sigma_1(u_{\mathcal{E}}(\sigma_2))}(\sigma_1\sigma_2(e_\star))=e_\star\nu(\sigma_1)\sigma_1(\nu(\sigma_2)),$$

ou encore

$$ad_{du_{\mathcal{E}}(\sigma_1,\sigma_2)u_{\mathcal{E}}(\sigma_1\sigma_2)}(\sigma_1\sigma_2(e_\star))=e_\star\nu(\sigma_1,\sigma_2)d\nu(\sigma_1,\sigma_2).$$

On exprime le membre de gauche grâce à l'égalité (5) pour $\sigma=\sigma_1\sigma_2$. On obtient

$$ad_{du_{\mathcal{E}}(\sigma_1,\sigma_2)}(e_\star\nu(\sigma_1\sigma_2))=e_\star\nu(\sigma_1,\sigma_2)d\nu(\sigma_1,\sigma_2).$$

Cela entraîne la relation (4).

Notons $z\mapsto\bar{z}$ les applications naturelles de $Z(G_{SC})$ dans $\mathcal{Z}(G_{SC})$ ou de $Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. La relation (4) entraîne que $\bar{\nu}$ est un cocycle. La relation (3) et la définition de l'action galoisienne sur $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ entraînent que $\sigma(\bar{e})=\bar{e}\pi(\bar{\nu}(\sigma))$. Donc $(\bar{\nu},\bar{e})$ appartient à $Z^{1,0}(\Gamma_F;\mathcal{Z}(G_{SC})\circlearrowleft\mathcal{Z}(\tilde{G}))$. Montrons que

(6) la classe de cohomologie de $(\bar{\nu},\bar{e})$ ne dépend pas des choix effectués et ne dépend que de la classe de cohomologie de (μ,γ).

On a choisi $\mathcal{E}$, $u_{\mathcal{E}}$, x et e. L'indépendance de $u_{\mathcal{E}}$ est claire : on ne peut modifier $u_{\mathcal{E}}(\sigma)$ que par un élément de $Z(G_{SC})$, ce qui ne change pas l'image $\bar{\nu}(\sigma)$ dans $\mathcal{Z}(G_{SC})$. Supposons d'abord $\mathcal{E}$ et (μ,γ) fixés. On ne peut modifier x et e qu'en remplaçant x par $z^{-1}x$ et e par $e\pi(z)$ pour un élément $z\in Z(G_{SC})$. On voit que cela remplace $\bar{\nu}(\sigma)$ par $\bar{\nu}_1(\sigma)=\bar{z}^{-1}\bar{\nu}(\sigma)\sigma(\bar{z})$ et $\bar{e}$ par $\bar{e}_1=\bar{e}\bar{z}$. Or $(\bar{\nu}_1,\bar{e}_1)$ est cohomologue à $(\bar{\nu},\bar{e})$. Supposons maintenant $\mathcal{E}$ fixé et remplaçons (μ,γ) par (μ_1,γ_1) cohomologue à (μ,γ). Soit $v\in G_{SC}$ tel que $\mu_1(\sigma)=v^{-1}\mu(\sigma)\sigma(v)$ et $\gamma_1=\gamma v$. Pour le couple (μ_1,γ_1), on peut choisir $e_1=e$ et $x_1=xv$. Alors $\mu'_1=\mu'$ et le couple $(\bar{\nu},\bar{e})$ ne change pas. Il reste à remplacer $\mathcal{E}$ par une autre paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_1$, (μ,γ) étant fixé. On fixe $r\in G_{SC}$ tel que $ad_r(\mathcal{E})=\mathcal{E}_1$. On peut choisir $u_{\mathcal{E}_1}(\sigma)=ru_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(r)^{-1}$, $e_1=ad_r(e)=e\pi(s)$, où $s=ad_e^{-1}(r)r^{-1}$, et $x_1=s^{-1}x$. On a $\bar{e}_1=\bar{e}$ par définition de l'ensemble $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. On a $\mu'_1(\sigma)=s^{-1}\mu'(\sigma)\sigma(s)$, puis

$$\begin{aligned}\nu_1(\sigma)&=ad_{e_1}^{-1}(u_{\mathcal{E}_1}(\sigma))\mu'_1(\sigma)u_{\mathcal{E}_1}(\sigma)^{-1}\\&=ad_r\circ ad_e^{-1}\circ ad_r^{-1}(ru_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(r)^{-1})s^{-1}\mu'(\sigma)\sigma(s)\sigma(r)u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}r^{-1}\\&=rad_e^{-1}(u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(r)^{-1})\mu'(\sigma)\sigma(ad_e^{-1}(r))u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}r^{-1}=ra\nu(\sigma)br^{-1},\end{aligned}$$

où $a=ad_e^{-1}(u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(r)^{-1}u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1})$ et $b=u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(ad_e^{-1}(r))u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$. Puisqu'on sait que $\nu_1(\sigma)$ est central, on peut aussi bien conjuguer par ra et on obtient $\nu_1(\sigma)=\nu(\sigma)ba$. Introduisons l'action $\sigma\mapsto\sigma_{G^*}$ de Γ_F sur G définie par $\sigma_{G^*}=ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma_G$. Le fait que $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}(\sigma(e))\in Z(G)e$ entraîne que ad_e commute à cette action. Or $a=ad_e^{-1}\circ\sigma_{G^*}(r)^{-1}$ et $b=\sigma_{G^*}\circ ad_e^{-1}(r)$. Donc $a=b^{-1}$ et $\nu_1(\sigma)=\nu(\sigma)$. Cela prouve (6).

D'après (6), on a défini l'application cherchée

$$\tilde{G}_{ab}(F)\to H^{1,0}(\Gamma_F;\mathcal{Z}(G_{SC})\circlearrowleft\mathcal{Z}(\tilde{G})).$$

Il est facile de voir comme en (1) que l'ensemble d'arrivée est un espace principal homogène sous $H^{1,0}(\Gamma_F;\mathcal{Z}(G_{SC})\stackrel{\pi}{\to}\mathcal{Z}(G))$.

Cas particulier. Dans le cas où $\tilde{G}$ est à torsion intérieure, ce dernier ensemble n'est autre que $G_{ab}(F)$. La flèche (2) étant bien sûr équivariante pour les actions de $G_{ab}(F)$ et les ensembles de départ et d'arrivée étant tous deux des espaces principaux homogènes sous ce groupe, la flèche est bijective.

Le groupe $Z(G)$ est naturellement un sous-groupe de T^*. On pose $\mathcal{Z}_0(G)=Z(G)/(Z(G)\cap(1-\theta^*)(T^*))$. Il y a un homomorphisme surjectif $\mathcal{Z}(G)\to\mathcal{Z}_0(G)$. On pose $\mathcal{Z}_0(\tilde{G})=\mathcal{Z}_0(G)\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})$, la notation ayant le même sens qu'en 1.7. L'application (2) se pousse en une application que nous notons

$$N^{\tilde{G}}:\tilde{G}_{ab}(F)\to H^{1,0}(\Gamma_F;\mathcal{Z}_0(G_{SC})\circlearrowleft\mathcal{Z}_0(\tilde{G})).$$

Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Rappelons que l'on a un homomorphisme $Z(G)\to Z(G')$. Il se factorise en une suite

$$Z(G)\to\mathcal{Z}_0(G)\stackrel{\xi_0}{\to}Z(G')$$

et ξ_0 est injectif. On a de même une suite

$$\mathcal{Z}(\tilde{G})\to\mathcal{Z}_0(\tilde{G})\stackrel{\tilde{\xi}_0}{\to}\mathcal{Z}(\tilde{G}'),$$

et $\tilde{\xi}_0$ est injectif. On a une suite d'extensions

$$\hat{G}' \to \hat{G}'_{ad} = \hat{G}'/(\hat{G}' \cap Z(\hat{G})) \to \hat{G}'_{AD} = \hat{G}'/Z(\hat{G}'),$$

dont on déduit une suite duale

$$G' \leftarrow G'_{sc} \leftarrow G'_{SC}.$$

Il y a donc une application naturelle

$$(7) \qquad H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G'_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}(\tilde{G}')) \to H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G'_{sc}) \circlearrowleft \mathcal{Z}(\tilde{G}')).$$

Un tore maximal de $\hat{G}'_{ad}$ est naturellement isomorphe à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}/(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})$, qui n'est autre que $\hat{T}_{ad}^{\hat{\theta}}$, où $\hat{T}_{ad}$ est l'image de $\hat{T}$ dans $\hat{G}_{AD}$ (on rappelle que $\hat{T}_{ad}^{\hat{\theta}}$ est connexe). Dualement, un tore maximal de G'_{sc} est donc isomorphe à $T^*_{sc}/(1-\theta^*)(T^*_{sc})$. On en déduit une suite analogue à celle ci-dessus :

$$Z(G_{SC}) \to \mathcal{Z}_0(G_{SC}) \stackrel{\xi_{0,sc}}{\to} Z(G'_{sc}),$$

où $\xi_{0,sc}$ est injectif. D'où une application naturelle

$$(8) \qquad H^{1,0}(\Gamma_F; \mathcal{Z}_0(G_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}_0(\tilde{G})) \to H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G'_{sc}) \circlearrowleft \mathcal{Z}(\tilde{G}')).$$

Montrons qu'elle est bijective. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_0(G_{SC}) & \to & \mathcal{Z}_0(G) \\ \xi_{0,sc} \downarrow & & \xi_0 \downarrow \\ Z(G'_{sc}) & \stackrel{\pi'}{\to} & Z(G') \end{array}$$

Alors

(9) $Z(G')$ est engendré par les images de π' et de ξ_0 ;

(10) l'image réciproque par π' de l'image de ξ_0 est l'image de $\xi_{0,sc}$.

Le tore T^* est engendré par $Z(G)$ et par l'image de T^*_{sc} et (9) en résulte. Soit $x \in Z(G'_{sc})$ tel que $\pi'(x)$ appartient à l'image de ξ_0. Choisissons un élément $t_{sc} \in T^*_{sc}$ dont x soit l'image dans $T^*_{sc}/(1-\theta^*)(T^*_{sc})$. L'hypothèse signifie que $\pi(t_{sc}) \in Z(G)(1-\theta^*)(T^*)$. Ecrivons $\pi(t_{sc}) = z(1-\theta^*)(t)$, avec $z \in Z(G)$ et $t \in T^*$. Ecrivons $t = z'\pi(t'_{sc})$, avec $z' \in Z(G)$ et $t'_{sc} \in T^*_{sc}$. Alors $\pi(t_{sc}(\theta^*-1)(t'_{sc})) = z(1-\theta^*)(z')$. Cela entraîne que $t_{sc}(\theta^*-1)(t'_{sc})$ appartient à $Z(G_{SC})$. Puisque $t_{sc}(\theta^*-1)(t'_{sc})$ a aussi pour image x dans $T^*_{sc}/(1-\theta^*)(T^*_{sc})$, cela montre que x appartient à l'image de $Z(G_{SC})$, qui n'est autre que celle de l'application $\xi_{0,sc}$. Cela prouve (10).

Soit $(\zeta', e') \in Z^{1,0}(\Gamma_F; Z(G'_{sc}) \circlearrowleft \mathcal{Z}(\tilde{G}'))$. La relation (9) entraîne que l'on peut écrire $e' = \tilde{\xi}_0(e)\pi'(z'_{sc})$, avec $z'_{sc} \in Z(G'_{sc})$ et $e \in \mathcal{Z}_0(\tilde{G})$. Alors (ζ', e') est cohomologue à $(\zeta'_1, \tilde{\xi}_0(e))$, où $\zeta'_1(\sigma) = z'_{sc}\zeta'(\sigma)\sigma(z'_{sc})^{-1}$. La relation $\sigma \circ \tilde{\xi}_0(e) = \tilde{\xi}_0(e)\pi'(\zeta'_1(\sigma))$ entraîne que $\pi' \circ \zeta'_1$ prend ses valeurs dans l'image de ξ_0. D'après (10), on peut écrire $\zeta'_1 = \xi_{0,sc}(\zeta)$, où ζ est à valeurs dans $\mathcal{Z}_0(G_{SC})$. Puisque $\xi_{0,sc}$ et $\tilde{\xi}_0$ sont injectifs, le couple (ζ, e) vérifie les conditions requises pour appartenir à $Z^{1,0}(\Gamma_F; \mathcal{Z}_0(G_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}_0(\tilde{G}))$. La classe de cohomologie de (ζ', e') est l'image par l'application (8) de celle de (ζ, e). Cela prouve la surjectivité de (8). Inversement, soient (ζ_1, e_1) et (ζ_2, e_2) deux éléments de $Z^{1,0}(\Gamma_F; \mathcal{Z}_0(G_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}_0(\tilde{G}))$ qui ont même image dans $H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G'_{sc}) \circlearrowleft \mathcal{Z}(\tilde{G}'))$. Il existe $z'_{sc} \in Z(G'_{sc})$ tel que $\xi_{0,sc}(\zeta_1(\sigma)) = \xi_{0,sc}(\zeta_2(\sigma))(z'_{sc})^{-1}\sigma(z'_{sc})$ et $\tilde{\xi}_0(e_1) = \tilde{\xi}_0(e_2)\pi'(z'_{sc})$.

Cette deuxième relation entraîne que $\pi'(z'_{sc})$ appartient à l'image de ξ_0. D'après (10), il existe $z_{sc} \in \mathcal{Z}_0(G_{SC})$ tel que $z'_{sc} = \xi_{0,sc}(z_{sc})$. D'après l'injectivité de $\xi_{0,sc}$ et $\tilde{\xi}_0$, on a alors $\zeta_1(\sigma) = \zeta_2(\sigma)(z_{sc})^{-1}\sigma(z_{sc})$ et $e_1 = e_2\pi(z_{sc})$. Donc les couples (ζ_1, e_1) et (ζ_2, e_2) sont cohomologues, ce qui prouve l'injectivité de (8).

L'ensemble de départ de (8) n'est autre que $\tilde{G}'_{ab}(F)$, puisque $\tilde{G}'$ est à torsion intérieure. Par composition de (7) et de l'inverse de (8), on obtient une application que nous notons

$$N^{\tilde{G}',\tilde{G}} : \tilde{G}'_{ab}(F) \to H^{1,0}(\Gamma_F; \mathcal{Z}_0(G_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}_0(\tilde{G})).$$

Remarque. On note aussi $N^{\tilde{G}',\tilde{G}}$ la composée de cette application avec l'application $\tilde{G}'(F) \to \tilde{G}'_{ab}(F)$.

Il est plus parlant d'identifier l'ensemble d'arrivée de cette application. Introduisons le groupe G_0 quasi-déployé sur F dual du groupe $\hat{G}_0 = \hat{G}^{\hat{\theta},0}$, muni de l'action galoisienne provenant de celle sur $\hat{G}$. Notons $\mathcal{G}'_0$ le sous-groupe $\hat{G}_0 \rtimes W_F$ de ${}^LG$. Le cocycle $\mathbf{a}$ ne joue ici aucun rôle. On peut remplacer $\mathbf{a}$ par le caractère trivial $\mathbf{1}$. Alors le triplet $\mathbf{G}_0 = (G_0, \mathcal{G}'_0, \hat{\theta})$ est une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{1})$ à laquelle on applique les constructions ci-dessus. Pour cette donnée, on a $Z(\hat{G}_0) = Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Cela résulte du fait que les racines simples pour la paire de Borel $(\hat{B} \cap \hat{G}_0, \hat{T} \cap \hat{G}_0 = \hat{T}^{\hat{\theta},0})$ de $\hat{G}_0$ sont exactement les restrictions à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ des racines simples pour la paire de Borel $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$, cf. 1.6. Il en résulte que $\hat{G}_{0,ad} = \hat{G}_{0,AD}$, puis $G_{0,sc} = G_{0,SC}$. Donc, pour cette donnée $\mathbf{G}_0$, l'application (7) est l'identité. Donc l'application $N^{\tilde{G}_0,\tilde{G}}$ est bijective, ce qui nous permet d'identifier $H^{1,0}(\Gamma_F; \mathcal{Z}_0(G_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}_0(\tilde{G}))$ à $\tilde{G}_{0,ab}(F)$.

Revenons à notre donnée $\mathbf{G}'$. On a construit des applications

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} \tilde{G}(F) & \to & \tilde{G}_{ab}(F) & & \\ & & & \searrow N^{\tilde{G}} & \\ & & & & \tilde{G}_{0,ab}(F) \\ & & & \nearrow N^{\tilde{G}',\tilde{G}} & \\ \tilde{G}'(F) & \to & \tilde{G}'_{ab}(F) & & \end{array}\right.$$

Les termes extrêmes sont des espaces principaux homogènes sous respectivement $G_{ab}(F)$, $G'_{ab}(F)$ et $G_{0,ab}(F)$. Il est clair qu'il y a des homomorphismes similaires

$$G_{ab}(F) \stackrel{N^G}{\to} G_{0,ab}(F) \stackrel{N^{G',G}}{\leftarrow} G'_{ab}(F)$$

compatibles avec les applications ci-dessus.

Supposons un instant que $F = \mathbb{R}$. On a introduit en 1.11 un K-espace $K\tilde{G}$. On définit $K\tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$ comme la réunion disjointe des $\tilde{G}_{p,ab}(\mathbb{R})$ pour $p \in \Pi$ et on obtient un diagramme similaire au précédent où $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et $\tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$ sont remplacés par $K\tilde{G}(\mathbb{R})$ et $K\tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$.

1.13 Caractères de $G(F)$, $G_{0,ab}(F)$, $G_{0,ab}(F)/N^G(G_{ab}(F))$

Comme on l'a dit dans le paragraphe précédent, on a l'égalité

$$G_{ab}(F) = H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G_{SC}) \to Z(G)).$$

Fixons un tore maximal T de G défini sur F. On introduit le tore dual $\hat{T}$ muni de l'action galoisienne duale de celle de T. L'homomorphisme naturel

$$H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G_{SC}) \to Z(G)) \to H^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc} \to T)$$

est bijectif. D'après [KS1] lemme A.3.B, le groupe de caractères continus du dernier groupe est le quotient de $H^{1,0}(W_F; \hat{T} \to \hat{T}_{ad})$ par l'image naturelle de $\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0}$. On vérifie que cette image est nulle et que l'homomorphisme naturel

$$H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to H^{1,0}(W_F; \hat{T} \to \hat{T}_{ad})$$

est bijectif. On en déduit que le groupe des caractères continus de $G_{ab}(F)$ est isomorphe à $H^1(W_F; Z(\hat{G}))$.

Cela nous permet de préciser la correspondance qui, à $\mathbf{a} \in H^1(W_F; Z(\hat{G}))$, associe le caractère ω de $G(F)$. On a un homomorphisme

$$G(F) \to G_{ab}(F) = H^{1,0}(\Gamma_F; Z(G_{SC}) \to Z(G)).$$

Concrètement, pour $g \in G(F)$, on écrit $g = \pi(g_{sc})z$, avec $g_{sc} \in G_{SC}$ et $z \in Z(G)$. L'image de g par l'application ci-dessus est représentée par le couple (μ, z), où $\mu(\sigma) = g_{sc}\sigma(g_{sc})^{-1}$. Alors $\omega(g)$ est le produit par l'accouplement

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc} \to T) \times H^{1,0}(W_F; \hat{T} \to \hat{T}_{ad}) \to \mathbb{C}^\times$$

des images de g dans le premier groupe et de $\mathbf{a}$ dans le second.

On vérifie sur les constructions que le dual de l'homomorphisme

$$G_{ab}(F) \overset{N^G}{\to} G_{0,ab}(F)$$

est l'homomorphisme naturel

$$(1) \qquad H^1(W_F; Z(\hat{G}_0)) \to H^1(W_F; Z(\hat{G})).$$

On a vu que $Z(\hat{G}_0) = Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Notons $Z(\hat{G})_*$ le groupe des $x \in Z(\hat{G})$ tels que $\sigma(x)x^{-1} \in Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Le quotient $Z(\hat{G})_*/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})$ n'est autre que le groupe des invariants $(Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}))^{\Gamma_F}$. On a un homomorphisme

$$Z(\hat{G})_*/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to H^1(W_F; Z(\hat{G}_0))$$

qui, à $x \in Z(\hat{G})_*$, associe le cocycle $w \mapsto w(x)x^{-1}$. On vérifie qu'il se quotiente en un isomorphisme de $Z(\hat{G})_*/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ sur le noyau de l'homomorphisme (1). Le groupe $Z(\hat{G})_*/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ s'identifie ainsi au groupe dual de $G_{0,ab}(F)/N^G(G_{ab}(F))$. Pour $x \in Z(\hat{G})_*/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, on note μ_x le caractère associé de $G_{0,ab}(F)/N^G(G_{ab}(F))$.

L'application $N^{\tilde{G}} : \tilde{G}_{ab}(F) \to \tilde{G}_{0,ab}(F)$ étant compatible à N^G, on voit qu'à tout $x \in Z(\hat{G})_*/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, on peut aussi associer une fonction $\tilde{\mu}_x$ sur $\tilde{G}_{0,ab}(F)$ telle que

(2) $\tilde{\mu}_x$ vaut 1 sur $N^{\tilde{G}}(\tilde{G}_{ab}(F))$;

(3) $\tilde{\mu}_x(g_0\gamma_0) = \mu_x(g_0)\tilde{\mu}_x(\gamma_0)$ pour tous $g_0 \in G_{0,ab}(F)$ et tout $\gamma_0 \in \tilde{G}_{0,ab}(F)$.

Pour $\gamma_0 \in \tilde{G}_{0,ab}(F)$, la somme

$$|Z(\hat{G})_*/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{G})^{\Gamma_F}|^{-1} \sum_{x \in Z(\hat{G})_*/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} \tilde{\mu}_x(\gamma_0)$$

vaut 1 si $\gamma_0 \in N^{\tilde{G}}(\tilde{G}_{ab}(F))$, 0 sinon.

1.14 Image de la correspondance

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Rappelons que $\mathbf{G}'$ est dit elliptique si et seulement si $Z(\hat{G}')^{\Gamma_F,0} = Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$.

Définition. Nous dirons qu'un élément semi-simple $\gamma \in \tilde{G}(F)$ est elliptique si et seulement s'il existe un tore tordu maximal elliptique $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$ tel que $\gamma \in \tilde{T}(F)$.

Si F est non-archimédien, cette condition équivaut à l'égalité $A_{G_\gamma} = A_{\tilde{G}}$. Si F est archimédien, la condition d'ellipticité entraîne cette égalité $A_{G_\gamma} = A_{\tilde{G}}$, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Proposition. *(i) Soit $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}')$. Alors les images de δ et γ dans $\tilde{G}_{0,ab}(F)$ par le diagramme 1.12(11) sont égales.*

(ii) Supposons $\mathbf{G}'$ elliptique et $F \neq \mathbb{R}$. Soit $\delta \in \tilde{G}'_{ss}(F)$. On suppose que δ est elliptique et $\tilde{G}$-régulier, et que l'image de δ dans $\tilde{G}_{0,ab}(F)$ appartient à l'image de $\tilde{G}_{ab}(F)$ par l'application $N^{\tilde{G}}$. Alors il existe $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tel que (δ, γ) appartienne à $\mathcal{D}(\mathbf{G}')$.

(iii) Supposons $F = \mathbb{R}$. L'assertion (ii) devient vraie si l'on remplace $\tilde{G}_{ab}(F)$ et $\mathcal{D}(\mathbf{G}')$ par $K\tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}_{K\tilde{G}}(\mathbf{G}')$.

Preuve. Soit $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}')$. Grâce au lemme 1.10, on choisit un diagramme $(\delta, B', T', B, T, \gamma)$ et on utilise les notations de 1.10 pour celui-ci. On note $\xi_{sc} : T_{sc} \to T'_{sc}$ l'homomorphisme relevant $\xi_{T,T'}$, où T'_{sc} est l'image réciproque de T' dans G'_{sc}. Cet homomorphisme est équivariant pour les actions galoisiennes. On n'a aucun mal à relever 1.10(6) sous la forme : on peut écrire $\gamma = e\pi(t)$, $\delta = e'\pi(t')$, avec $t \in T_{sc}$, $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ et $t' = \xi_{sc}(t)$. D'après les définitions, les images de δ et γ dans $\tilde{G}_{0,ab}(F)$ sont représentés respectivement par les couples (ν', e_0) et (ν, e_0), où $\nu'(\sigma) = t'\sigma(t')^{-1}$, $\nu(\sigma) = ad_e^{-1}(u_{\mathcal{E}}(\sigma))t\sigma(t)^{-1}u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$ et e_0 est l'image de e dans $\mathcal{Z}_0(\tilde{G})$. Pour prouver (i), il suffit de prouver l'égalité $\xi_{sc}(\nu(\sigma)) = \nu'(\sigma)$. Puisque $\nu(\sigma)$ est central, on a aussi bien $\nu(\sigma) = u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}ad_e(u_{\mathcal{E}}(\sigma))t^{-1}\sigma(t)$. On sait que $u_{\mathcal{E}}(\sigma)$ définit un élément de W^θ que l'on peut relever en un élément de G_e. On peut donc écrire $u_{\mathcal{E}}(\sigma) = n(\sigma)t(\sigma)$, où $n(\sigma) \in G_e$ et $t(\sigma) \in T_{sc}$. Alors $\nu(\sigma) = (\theta^{-1} - 1)(t(\sigma))t\sigma(t)^{-1}$, d'où $\xi_{sc}(\nu(\sigma)) = \xi_{sc}(t\sigma(t)^{-1})$. Puisque ξ_{sc} est équivariant pour les actions galoisiennes, on en déduit l'égalité cherchée $\xi_{sc}(\nu(\sigma)) = \nu'(\sigma)$.

Plaçons-nous sous les hypothèses de (ii). On choisit une paire de Borel (B', T') de G' conservée par ad_δ et on identifie <u>la</u> paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$ de G à une paire particulière. On choisit une cochaîne $u_{\mathcal{E}^*}$ pour cette paire, on la note simplement u^*. Munissons G de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G^*} = ad_{u^*(\sigma)} \circ \sigma$. Sa restriction à T^* est l'action déjà introduite sur ce tore et G est quasi-déployé pour cette action. Posons $\theta = \theta_{\mathcal{E}^*}$. Les deux paires (B', T') et (B^*, T^*) déterminent un homomorphisme $\xi_{T^*,T'} : T^* \to T'$. Il y a un cocycle $\omega_{T'} : \Gamma_F \to W^\theta$ tel que $\sigma_{G'} \circ \xi_{T^*,T'} \circ \sigma_{G^*}^{-1} = \xi_{T^*,T'} \circ \omega_{T'}(\sigma)$. Le groupe G_{SC}^θ est lui-aussi quasi-déployé. D'après [K1] corollaire 2.2, on peut fixer $g \in G_{SC}^\theta$ tel qu'en posant $T = ad_{g^{-1}}(T^*)$, le tore T soit défini sur F pour l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ et $\xi_{T,T'} = \xi_{T^*,T'} \circ ad_g$ vérifie $\sigma_{G'} \circ \xi_{T,T'} = \xi_{T,T'} \circ \sigma_{G^*}$. Remarquons qu'en posant $\mathcal{E} = ad_g^{-1}(\mathcal{E}^*)$ et $B = ad_g^{-1}(B^*)$, l'homomorphisme $\xi_{T,T'}$ est celui associé aux deux paires (B', T') et (B, T). D'autre part, puisque g est fixe par θ, on a $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}) = Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*)$ et $\theta = \theta_{\mathcal{E}}$.

Par hypothèse, l'image de δ dans $\tilde{G}_{0,ab}(F)$ est aussi l'image d'un élément de $\tilde{G}_{ab}(F)$. On peut représenter ce dernier par un élément $(\mu, e) \in Z^{1,0}(\Gamma_F; G_{SC} \circlearrowleft \tilde{G})$, où e appartient à $Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$. Son image dans $H^{1,0}(\Gamma_F; \mathcal{Z}_0(G_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}_0(\tilde{G}))$ est représentée par le couple (ν_0, e_0) suivant : e_0 est l'image de e dans $\mathcal{Z}_0$ et $\nu_0(\sigma)$ est l'image de $\nu(\sigma) =$

$\theta^{-1}(u^*(\sigma))\mu(\sigma)u^*(\sigma)^{-1}$ dans $\mathcal{Z}_0(G_{SC})$. D'après la preuve de la bijectivité de l'application 1.12(8), on peut écrire $\delta = f'\pi(t')$, où $t' \in T'_{sc}$, $f \in \mathcal{Z}(\tilde{G})$ et f' est l'image de f dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$. L'image de δ dans $H^{1,0}(\Gamma_F; \mathcal{Z}_0(G_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}_0(\tilde{G}))$ est représentée par le couple (ν', f_0), où $\nu'(\sigma) = t'\sigma(t')^{-1}$ et f_0 est l'image de f dans $\mathcal{Z}_0(\tilde{G})$. L'égalité des images de δ et (μ, e) signifie que les couples (ν_0, e_0) et (ν', f_0) sont cohomologues, c'est-à-dire qu'il existe $z \in Z(G_{SC})$ tel que $\nu'(\sigma) = z^{-1}\nu_0(\sigma)\sigma(z)$ et $f_0 = e_0 z$ (pour simplifier, on note encore z l'image de cet élément dans divers quotients de $Z(G_{SC})$). Quitte à remplacer le couple (μ, e) par le couple cohomologue (μ', ez), où $\mu'(\sigma) = z^{-1}\mu(\sigma)\sigma(z)$, on se ramène à la situation où $f_0 = e_0$, donc $f' = e'$, et $\nu' = \nu_0$. Rappelons que ν est à valeurs dans $Z(G_{SC}) \subset T$. L'égalité $\nu' = \nu_0$ signifie que signifie que $\xi_{sc}(\nu(\sigma)) = \nu'(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, où $\xi_{sc} : T_{sc} \to T'_{sc}$ relève $\xi_{T,T'}$. Soit $t \in T_{sc}$ tel que $\xi_{sc}(t) = t'$. D'après l'équivariance de ξ_{sc}, l'égalité précédente signifie que $\nu(\sigma)$ et $t\sigma_{G^*}(t)^{-1}$ ont même image dans $T_{sc}/(1-\theta)(T_{sc})$. On peut choisir une cochaîne $y : \Gamma_F \to T_{sc}$ telle que

$$(1) \qquad \nu(\sigma) = (1-\theta^{-1})(y(\sigma))t\sigma_{G^*}(t)^{-1}.$$

On note d la différentielle pour l'action naturelle $\sigma \mapsto \sigma_G$ et d^* celle pour l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$. Puisque ν est à valeurs centrales, on a $d\nu = d^*\nu$. D'autre part, θ commute à l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$. De l'égalité ci-dessus se déduit la relation $d\nu = (1-\theta^{-1})(d^*y)$ puis $(1-\theta^{-1})(du^*d^*y) = 1$ grâce à 1.12(4). Puisque du^* est à valeurs centrales, c'est un cocycle pour chacune des actions galoisiennes. Donc du^*d^*y est un cocycle pour l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ et l'égalité précédente montre qu'il prend ses valeurs dans T_{sc}^{θ}.

Remarque. La notation T_{sc}^{θ} désigne l'ensemble des points fixes par θ dans T_{sc}, et non pas l'image réciproque dans G_{SC} de T^{θ}. L'ensemble T_{sc}^{θ} est connexe, donc est un tore.

Les hypothèses d'ellipticité de $\mathbf{G}'$ et de δ et l'équivariance de ξ_{sc} entraînent que ce tore T_{sc}^{θ}, muni de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$, est elliptique. Donc $H^2(\Gamma_F, T_{sc}^{\theta}) = 0$ et du^*d^*y est le cobord d'une cochaîne à valeurs dans T_{sc}^{θ}. Quitte à multiplier y par l'inverse de cette cochaîne, on peut supposer $du^*d^*y = 1$. Posons $Y(\sigma) = y(\sigma)u^*(\sigma)$. L'égalité précédente et un calcul standard montrent que Y est un cocycle pour l'action naturelle $\sigma \mapsto \sigma_G = ad_{u^*(\sigma)^{-1}} \circ \sigma_{G^*}$. Posons $\gamma_1 = et$ (ou plus exactement $\gamma_1 = e\pi(t)$). Puisque (μ, e) appartient à $Z^{1,0}(\Gamma_F; G_{SC} \circlearrowleft \tilde{G})$, on a $\sigma(e) = e\mu(\sigma)$, d'où $\sigma(\gamma_1) = e\mu(\sigma)\sigma(t)$. On a

$$\mu(\sigma)\sigma(t) = \theta^{-1}(u^*(\sigma)^{-1})\nu(\sigma)u^*(\sigma)u^*(\sigma)^{-1}\sigma_{G^*}(t)u^*(\sigma).$$

En utilisant (1), on obtient $\mu(\sigma)\sigma(t) = \theta^{-1}(Y(\sigma)^{-1})tY(\sigma)$, d'où

$$(2) \qquad \sigma(\gamma_1) = \pi(Y(\sigma)^{-1})\gamma_1\pi(Y(\sigma)),$$

où on a rétabli l'homomorphisme π pour plus de précision. Jusque-là, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que F est non archimédien. Utilisons-la. Le cocycle Y est à valeurs dans G_{SC}. Or $H^1(\Gamma_F, G_{SC}) = 0$. Donc on peut choisir $g_1 \in G_{SC}$ tel que $Y(\sigma) = g_1^{-1}\sigma(g_1)$. Posons $\gamma = g_1\gamma_1 g_1^{-1}$. La relation (2) implique que γ appartient à $\tilde{G}(F)$. La classe de conjugaison sur $\bar{F}$ de γ est la même que celle de γ_1. En appliquant les définitions de 1.8, la définition $\gamma_1 = et$ montre que sa classe correspond à celle de δ. Cela prouve (ii).

Supposons maintenant $F = \mathbb{R}$ et considérons un K-espace tordu. On peut supposer qu'il est issu d'un couple $(G, \tilde{G})$ comme en 1.11. On a encore (2). Fixons $\gamma_2 \in \tilde{G}(F)$, écrivons $\gamma_1 = x\gamma_2$, avec $x \in G$. La relation (2) entraîne

$$ad_{\gamma_2} \circ \pi(Y(\sigma)) = x^{-1}\pi(Y(\sigma))\sigma(x).$$

Donc la classe du cocycle $\pi(Y)$ est fixe par θ. Il existe $p \in \Pi$ et $g_1 \in G$ tels que $\pi(Y(\sigma)) = g_1^{-1}\pi(p(\sigma))\sigma(g_1)$. La relation (2) se récrit

$$\sigma(g_1\gamma_1 g_1^{-1}) = ad_{p(\sigma)^{-1}}(g_1\gamma_1 g_1^{-1}).$$

Posons $\gamma = \tilde{\phi}_p^{-1}(g_1\gamma_1 g_1^{-1})$. Alors γ appartient à $\tilde{G}_p(\mathbb{R})$ et, de nouveau, les classes de conjugaison de γ et δ se correspondent. Cela prouve (iii). $\square$

2 Transfert

2.1 Facteurs de transfert

La situation est la même qu'en 1.5. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On introduit des données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$. Le terme G'_1 est un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur F, $C_1 \subset G'_1$ est un tore central défini sur F et induit (c'est-à-dire que $X_*(C_1)$ possède une base conservée par l'action de Γ_F). Il y a une suite exacte

$$1 \to C_1 \to G'_1 \to G' \to 1.$$

Le terme $\tilde{G}'_1$ est un espace tordu sur G'_1, défini sur F, à torsion intérieure, tel que $\tilde{G}'_1(F) \neq \emptyset$. Il y a une surjection $\tilde{G}'_1 \to \tilde{G}'$ compatible avec la surjection $G'_1 \to G'$. Le terme $\hat{\xi}_1 : \mathcal{G}' \to {}^LG'_1$ est un plongement compatible aux projections sur W_F dont la restriction à $\hat{G}'$ est un homomorphisme $\hat{G}' \to \hat{G}'_1$ dual de $G'_1 \to G'$. Il existe de telles données auxiliaires, cf. [KS1] paragraphe 2.2. Fixons-en.

Pour $w \in W_F$, soit $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$. Ecrivons $\hat{\xi}_1(g_w) = (g'_1(w), w)$. L'image $z_{C_1}(w)$ de $g'_1(w)$ dans $\hat{G}'_1/\hat{G}' = \hat{C}_1$ ne dépend pas du choix de g_w. L'application $w \mapsto z_{C_1}(w)$ est un cocycle, qui détermine un caractère λ_1 de $C_1(F)$.

Notons $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des $(\delta_1, \gamma) \in \tilde{G}'_1(F) \times \tilde{G}(F)$ tels que $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}')$, où δ est l'image de δ_1 dans $\tilde{G}'(F)$. Kottwitz et Shelstad définissent ce que l'on peut appeler un bifacteur de transfert, que l'on note $\mathbf{\Delta}_1 : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1 \to \mathbb{C}^\times$. On rappelle sa définition (légèrement modifiée : on supprime les termes Δ_{IV}) au paragraphe suivant. Il ne dépend que des données déjà fixées. Un facteur de transfert est une application $\Delta_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{C}^\times$ telle que

$$\Delta_1(\delta_1, \gamma)\Delta_1(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma})^{-1} = \mathbf{\Delta}_1(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}).$$

Il existe un tel facteur. Il est unique à homothétie près. La valeur $\Delta_1(\delta_1, \gamma)$ ne dépend que de la classe de conjugaison stable de δ_1 (on rappelle que, δ_1 étant fortement régulier, sa classe de conjugaison stable est l'intersection de $\tilde{G}'_1(F)$ avec la classe de conjugaison géométrique de δ_1, c'est-à-dire sa classe de conjugaison par $G'_1 = G'_1(\bar{F})$). Pour $c_1 \in C_1(F)$ et $g \in G(F)$, on a l'égalité

$$\Delta_1(c_1\delta_1, g^{-1}\gamma g) = \lambda_1(c_1)^{-1}\omega(g)\Delta_1(\delta_1, \gamma).$$

Supposons $F = \mathbb{R}$ et considérons un K-espace $K\tilde{G}$. En utilisant évidemment les mêmes données auxiliaires pour chaque espace $\tilde{G}_p$, on définit l'ensemble $\mathcal{D}_{K\tilde{G},1}$ réunion disjointe des $\mathcal{D}_{\tilde{G}_p,1}$ relatifs à chaque $\tilde{G}_p$. Comme l'a remarqué Kottwitz, on peut définir un bifacteur de transfert $\mathbf{\Delta}_1 : \mathcal{D}_{K\tilde{G},1} \times \mathcal{D}_{K\tilde{G},1} \to \mathbb{C}^\times$, cf. 2.3.

2.2 Définition du bifacteur de transfert

On conserve la situation du paragraphe précédent. On fixe des paires de Borel épinglées $\hat{\mathcal{E}}$ et $\hat{\mathcal{E}}'$ comme en 1.5 et on utilise les constructions de ce paragraphe relatives à ces paires. On fixe deux éléments (δ_1, γ) et $(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma})$ de $\mathcal{D}_1$.

On fixe un diagramme $(\delta, B', T', B, T, \gamma)$ et on utilise pour celui-ci les notations de 1.10. On complète (B,T) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$. On fixe $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ et on pose $\theta = \theta_e$. On note $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans l'algèbre de Lie de G. Il s'identifie à $\Sigma(T^*)$ par l'identification $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^*$. Mais il est muni d'une action galoisienne naturelle du fait que T est défini sur F et c'est cette action que l'on considère dans la suite. L'automorphisme θ agit sur $\Sigma(T)$. Comme en 1.6, on note $\Sigma(T)_{res}$ l'ensemble des restrictions α_{res} d'éléments $\alpha \in \Sigma(T)$ à $T^{\theta,0}$. On note $\Sigma_{res,ind}$ le sous-ensemble des éléments indivisibles de $\Sigma(T)_{res}$. On fixe des a-data $(a_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(T)_{res,ind}}$ pour l'ensemble $\Sigma(T)_{res,ind}$ muni de son action galoisienne, cf. [LS] paragraphe 2.2. On les relève en des a-data pour $\Sigma(T)$ en posant $a_\alpha = a_{\alpha_{res}}$ si α_{res} est indivisible, $a_\alpha = a_{\alpha_{res}/2}$ sinon. On définit une fonction $r_T : \Gamma_F \to T_{sc}^\theta$ par

$$r_T(\sigma) = \prod_{\alpha \in \Sigma(T), \alpha > 0, \sigma^{-1}(\alpha) < 0} \check{\alpha}(a_\alpha),$$

où la positivité est relative à B et où on considère que les coracines prennent leurs valeurs dans G_{SC}. Comme en 1.2, on fixe pour tout $\sigma \in \Gamma_F$ un élément $u_{\mathcal{E}}(\sigma) \in G_{SC}$ tel que $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)} \circ \sigma$ conserve $\mathcal{E}$. L'élément $u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$ définit un élément de W^θ que nous notons $\omega_T(\sigma)$. D'autre part, à la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ est associée une section de Springer $n_{\mathcal{E}} : W \to G_{SC}$, cf. [LS] 2.1. On définit une cochaîne $V_T : \Gamma_F \to T_{sc}$ par

$$V_T(\sigma) = r_T(\sigma) n_{\mathcal{E}}(\omega_T(\sigma)) u_{\mathcal{E}}(\sigma).$$

Notons que $n_{\mathcal{E}}(\omega_T(\sigma)) \in G_{SC,e}$ car $n_{\mathcal{E}}$ est équivariante pour l'action de θ. On vérifie que $dV_T = du_{\mathcal{E}}$. Notons T'_1 le commutant de δ_1 dans G'_1. On a deux homomorphismes équivariants pour les actions galoisiennes

$$T'_1 \stackrel{\xi_{T'_1,T'}}{\to} T' \stackrel{\xi_{T,T'}}{\leftarrow} T.$$

Notons $\mathfrak{T}_1$ le produit fibré de T'_1 et T au-dessus de T', c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}_1 = \{(t_1, t) \in T'_1 \times T; \xi_{T'_1,T'}(t_1) = \xi_{T,T'}(t)\}.$$

Notons e' l'image naturelle de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$. Relevons-le en un élément $e'_1 \in \mathcal{Z}(\tilde{G}_1)$. Ecrivons $\gamma = \nu e$ et $\delta_1 = \mu_1 e'_1$ puis posons $\nu_1 = (\mu_1, \nu)$. Alors ν_1 appartient à $\mathfrak{T}_1$: l'image commune de ν et μ_1 dans T' est l'élément μ tel que $\delta = \mu e'$. Remarquons qu'il y a un homomorphisme naturel $1 - \theta : T_{sc} \to \mathfrak{T}_1$: à $t_{sc} \in T_{sc}$, il associe le couple $(1, (1-\theta) \circ \pi(t_{sc})) \in \mathfrak{T}_1$. On vérifie l'égalité

$$(1-\theta)(V_T(\sigma)) = (z_1(\sigma), z(\sigma)) \sigma(\nu_1) \nu_1^{-1},$$

où $z(\sigma)$ et $z_1(\sigma)$ sont les éléments de $Z(G)$, resp. $Z(G'_1)$, tels que $u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(e)u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1} = z(\sigma)^{-1}e$, resp. $\sigma(e'_1) = z_1(\sigma)^{-1} e'_1$.

On effectue les mêmes constructions pour la paire $(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma})$. On utilise les mêmes notations, en les soulignant. Il est essentiel d'effectuer pour ces données des choix cohérents avec ceux faits pour la première paire. Pour cela, on fixe $r \in G_{SC}$ tel que $ad_r(\mathcal{E}) = \underline{\mathcal{E}}$. On choisit $\underline{e} = ad_r(e)$, $u_{\underline{\mathcal{E}}}(\sigma) = ru_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(r)^{-1}$ et $\underline{e}'_1 = e'_1$ (ce dernier choix est loisible puisque e et $\underline{e}$ ont même image e' dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$. Définissons le tore $U = (T_{sc} \times \underline{T}_{sc})/diag_-(Z(G_{SC}))$, où $diag_-$ est le plongement antidiagonal. On définit une cochaîne $V : \Gamma_F \to U : V(\sigma)$ est l'image dans U de $(V_T(\sigma), V_{\underline{T}}(\sigma)^{-1})$. C'est un cocycle. Introduisons le groupe $\mathfrak{Z}_1$ formé des couples $(z_1, z) \in Z(G'_1) \times Z(G)$ qui ont même image dans $Z(G')$. Définissons le tore $S_1 = (\mathfrak{T}_1 \times \underline{\mathfrak{T}}_1)/diag_-(\mathfrak{Z}_1)$. Notons $\boldsymbol{\nu}_1 = (\nu_1, \underline{\nu}_1^{-1})$. Des homomorphismes $1-\theta$ définis ci-dessus se déduit un autre homomorphisme $1 - \theta : U \to S_1$. On vérifie que le couple $(V, \boldsymbol{\nu}_1)$ appartient à $Z^{1,0}(\Gamma_F; U \stackrel{1-\theta}{\to} S_1)$.

On va effectuer des constructions similaires du côté dual. Des deux paires de Borel $\mathcal{E}$ et $\hat{\mathcal{E}}$ se déduisent des isomorphismes en dualité $X_*(T) \simeq X^*(\hat{T})$ et $X^*(T) \simeq X_*(\hat{T})$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on a défini plus haut l'élément $\omega_T(\sigma) \in W^\theta$. On peut munir le tore $\hat{T}$ d'une nouvelle action galoisienne de sorte que σ agisse par $\sigma_T = \omega_T(\sigma)\sigma_G$ (où σ_G est l'action qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$, cf. 1.5). On vérifie que, pour cette action, les isomorphismes ci-dessus deviennent équivariants, autrement dit $\hat{T}$, muni de cette action, est le tore dual de T. C'est cette action que l'on utilise dans la suite. On note $\Sigma(\hat{T})_{res,ind}$ l'ensemble des racines de $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}^{\hat{\theta},0}$. Il s'identifie à l'ensemble des éléments indivisibles dans $\Sigma(\hat{T})_{res}$, cf. 1.6. Il est de plus muni de l'action galoisienne provenant de celle sur $\hat{T}$. On fixe des χ-data $(\chi_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(\hat{T})_{res,ind}}$ pour cette action, cf. [LS] paragraphe 2.5.

Considérons l'ensemble des orbites de l'action galoisienne dans $\Sigma(\hat{T})_{res,ind}$. Disons qu'une orbite $\mathcal{O}$ est symétrique si $\mathcal{O} = -\mathcal{O}$ (ou, ce qui revient au même, si $\mathcal{O} \cap (-\mathcal{O}) \neq \emptyset$) et qu'elle est asymétrique sinon. Considérons un couple $(\mathcal{O}, -\mathcal{O})$ d'orbites asymétriques. Fixons $\alpha \in \mathcal{O}$, notons F_α l'extension de F telle que Γ_{F_α} soit le fixateur de α dans Γ_F. Fixons un ensemble de représentants $w_1, ..., w_n$ du quotient $W_{F_\alpha} \backslash W_F$. Soit $w \in W_F$. Pour tout $i = 1, ..., n$, il y a un unique couple $(j, v_i(w)) \in \{1, ..., n\} \times W_{F_\alpha}$ tel que $w_i w = v_i(w) w_j$. On pose

$$\hat{r}_T^{\mathcal{O},-\mathcal{O}}(w) = \left(\prod_{\beta \in \mathcal{O}; \beta > 0, w^{-1}\beta < 0} \check{\beta}(-1) \right) \left(\prod_{i=1,...,n} (w_i^{-1}\check{\alpha})(\chi_\alpha(v_i(w))) \right).$$

La positivité est relative à $\hat{B} \cap \hat{G}^{\hat{\theta},0}$. Grâce à l'isomorphisme du corps de classes, on a identifié χ_α à un caractère de W_{F_α}. Considérons maintenant une orbite symétrique $\mathcal{O}$. On fixe $\alpha \in \mathcal{O}$ et des éléments $w_0, w_1, ..., w_n \in W_F$ de sorte que $w_0^{-1}\alpha = -\alpha$ et $i \mapsto w_i^{-1}\alpha$ soit une bijection de $\{1, ..., n\}$ sur l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{O}$. Pour $i = 1, ..., n$, on pose $w_{-i} = w_0 w_i$. Soit $w \in W_F$. Pour tout $i = 1, ..., n$, il y a un unique couple $(j, v_i(w)) \in \{\pm 1, ..., \pm n\} \times W_{F_\alpha}$ (avec la définition ci-dessus de F_α) de sorte que $w_i w = v_i(w) w_j$. On pose

$$\hat{r}_T^{\mathcal{O}}(w) = \prod_{i=1,...,n} (w_i^{-1}\check{\alpha})(\chi_\alpha(v_i(w))).$$

On note $\hat{r}_T(w)$ le produit des $\hat{r}^{\mathcal{O},-\mathcal{O}}(w)$ sur les paires $(\mathcal{O}, -\mathcal{O})$ d'orbites asymétriques et des $\hat{r}_T^{\mathcal{O}}(w)$ sur les orbites $\mathcal{O}$ symétriques. Cela définit une cochaîne $\hat{r}_T : W_F \to \hat{T}_{sc}^{\hat{\theta}}$. On a effectué de nombreux choix, mais on montre qu'ils n'affectent cette cochaîne que par multiplication par un cobord, ce qui est sans importance pour la suite.

On peut effectuer des constructions analogues dans le groupe $\hat{G}'$. Il existe un cocycle $\omega_{T,G'} : \Gamma_F \to W^{G'}$ de sorte qu'en munissant le tore $\hat{T}'$ de l'action $(\sigma, t) \mapsto \sigma_{T'}(t) = \omega_{T,G'}(\sigma)\sigma_{G'}(t)$, ce tore s'identifie au tore dual de T'. En fait l'égalité $\hat{T}' = \hat{T}^{\hat{\theta},0}$ est compatible aux actions que l'on vient de définir sur $\hat{T}'$ et $\hat{T}$. C'est une conséquence du fait que l'application $\xi_{T,T'} : T \to T'$ est équivariante pour les actions galoisiennes. On munit l'ensemble $\Sigma(\hat{T}')$ des racines de $\hat{T}'$ dans l'algèbre de Lie de $\hat{G}'$ de l'action galoisienne provenant de celle que l'on vient de définir sur $\hat{T}'$. Cet ensemble n'est pas forcément inclus dans $\Sigma(\hat{T})_{res,ind}$, mais il y a néanmoins une injection naturelle du premier dans le second : l'image de $\alpha \in \Sigma(\hat{T}')$ est le seul élément de $\Sigma(\hat{T})_{res,ind} \cap \{\alpha/2, \alpha\}$, cf. 1.6. Cette injection est équivariante pour les actions galoisiennes. De nos χ-data se déduisent des χ-data pour l'ensemble $\Sigma(\hat{T}')$. On définit alors une cochaîne $\hat{r}_{T,G'} : W_F \to \hat{T}'_{sc}$ où $\hat{T}'_{sc}$ est l'image réciproque de $\hat{T}'$ dans $\hat{G}'_{SC}$. Sa définition est copiée sur celle de $\hat{r}_T$.

On introduit les sections de Springer $\hat{n} : W^\theta \to \hat{G}_{SC}^{\hat{\theta}}$ et $\hat{n}_{G'} : W^{G'} \to \hat{G}'_{SC}$ associées aux paires de Borel épinglées $\hat{\mathcal{E}}$ et $\hat{\mathcal{E}}'$. Plus exactement, dans le cas de $\hat{n}$, à la paire de Borel épinglée de $\hat{G}_{SC}^{\hat{\theta}}$ qui se déduit naturellement de $\hat{\mathcal{E}}$. Celle-ci a pour paire de Borel sous-jacente la paire $(\hat{B}_{sc} \cap \hat{G}_{SC}^{\hat{\theta}}, \hat{T}_{sc}^{\hat{\theta}})$ et les éléments de l'épinglage sont les $\hat{E}_\alpha + \hat{E}_{\hat{\theta}\alpha} + ... + \hat{E}_{\hat{\theta}^{n_\alpha - 1}\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$, où $n_\alpha \geq 1$ est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\hat{\theta}^n\alpha = \alpha$. Rappelons que l'on a modifié l'isomorphisme ${}^LG \simeq \hat{G} \rtimes W_F$, cf. 1.5. On fixe une application

$$\begin{array}{ccc} W_F & \to & \mathcal{G}' \\ w & \mapsto & g_w = (g(w), w) \end{array}$$

de sorte que $ad_{g(w)} w_G$ agisse comme $w_{G'}$ sur $\hat{G}'$. Pour $w \in W_F$, posons

$$t_T(w) = \hat{r}_T(w)\hat{n}(\omega_T(w))g(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))^{-1}\hat{r}_{T,G'}(w)^{-1}.$$

L'action galoisienne sur $\hat{T}$, relevée en une action de W_F, est $w \mapsto \hat{n}(\omega_T(w))w_G = ad_{\hat{n}(\omega_T(w))g(w)^{-1}} w_{G'}$. Restreinte à $\hat{T}'$, elle est égale à $ad_{\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))} w_{G'}$. Donc l'élément $\hat{n}(\omega_T(w))g(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))^{-1}$ appartient à $\hat{T}$. Il en résulte que $t_T(w) \in \hat{T}$. On montre que le cobord dt_T de la cochaîne t_T est égal à celui de la cochaîne $w \mapsto g(w)^{-1}$, qui prend ses valeurs dans $Z(\hat{G}')$. Rappelons que l'on a un plongement $\hat{\xi}_1 : \mathcal{G}' \to {}^LG'_1$. Notons $\hat{T}'_1$ le commutant dans $\hat{G}'_1$ de $\hat{\xi}_1(\hat{T}')$ et $\hat{B}'_1$ le groupe engendré par $\hat{T}'_1$ et $\hat{\xi}_1(\hat{B}')$. Le triplet $(\hat{B}'_1, \hat{T}'_1, (\hat{\xi}_1(\hat{E}'_\alpha))_{\alpha \in \Delta'})$ est une paire de Borel épinglée de $\hat{G}'_1$. Comme en 1.5, on modifie l'isomorphisme ${}^LG'_1 \simeq \hat{G}'_1 \rtimes W_F$ de sorte que l'action d'un élément de W_F conserve cette paire. On munit $\hat{T}'_1$ de la nouvelle action galoisienne $(\sigma, t_1) \mapsto \sigma_T(t_1) = \omega_{T,G'}(\sigma)\sigma_{G'_1}(t_1)$. Muni de cette action, $\hat{T}'_1$ est le tore dual de T'_1. Posons $\hat{\xi}_1(g_w) = (\zeta_1(w), w)$. D'après la définition de g_w, $\zeta_1(w)$ appartient au centre de $\hat{G}_1$, a fortiori à $\hat{T}'_1$. Notons $\hat{\mathfrak{T}}_1$ le quotient de $\hat{T}'_1 \times \hat{T}$ par la relation d'équivalence $(t_1\hat{\xi}(t'), t) = (t_1, t't)$ pour tout $t' \in \hat{T}'$. C'est le tore dual de $\mathfrak{T}_1$. On définit une cochaîne $\hat{V}_{\mathfrak{T}_1} : W_F \to \hat{\mathfrak{T}}_1$: $\hat{V}_{\mathfrak{T}_1}(w)$ est l'image de $(\zeta_1(w), t_T(w))$ dans $\hat{\mathfrak{T}}_1$. C'est un cocycle.

On définit les objets similaires relatifs au tore $\underline{T}$. Remarquons que, quand on oublie les actions galoisiennes, on a l'égalité $\hat{\mathfrak{T}}_1 = \hat{\underline{\mathfrak{T}}}_1$ et qu'il y a un homomorphisme naturel $j : \hat{T}_{sc} \to \hat{\mathfrak{T}}_1 = \hat{\underline{\mathfrak{T}}}_1$. On vérifie que, pour tout $\omega \in W^{G'}$, l'application $\omega - 1$ de $\hat{\mathfrak{T}}_1$ dans lui-même se relève en une application naturelle encore notée $\omega - 1 : \mathfrak{T}_1 \to \hat{T}_{sc}$. Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\mathfrak{T}}_1 & & \stackrel{\omega-1}{\to} & & \hat{\mathfrak{T}}_1 \\ & \searrow \omega - 1 & & \nearrow j & \\ & & \hat{T}_{sc} & & \end{array}$$

Notons $\hat{S}_1$ le sous-tore de $\hat{\mathfrak{T}}_1 \times \hat{\underline{\mathfrak{T}}}_1 \times \hat{T}_{sc}$ formé des $(t, \underline{t}, t_{sc})$ tels que $j(t_{sc}) = t\underline{t}^{-1}$. On le munit de l'action de Γ_F définie par

$$(\sigma, (t, \underline{t}, t_{sc})) \mapsto (\sigma_T(t), \sigma_{\underline{T}}(\underline{t}), \sigma_T(t_{sc})(\omega_{T,G'}(\sigma)\omega_{\underline{T},G'}(\sigma)^{-1} - 1)\sigma_{\underline{T}}(\underline{t}))$$

$$= (\sigma_T(t), \sigma_{\underline{T}}(\underline{t}), \sigma_{\underline{T}}(t_{sc})(1-\omega_{\underline{T},G'}(\sigma)\omega_{T,G'}(\sigma)^{-1})\sigma_T(t)).$$

On vérifie que $\hat{S}_1$ est le tore dual de S_1. Pour $w \in W_F$, on fixe un élément $g_{sc}(w) \in \hat{G}_{SC}$ qui ait même image que $g(w)$ dans $\hat{G}_{AD}$. On définit une cochaîne $t_{T,sc} : W_F \to \hat{T}_{sc}$ par

$$t_{T,sc}(w) = \hat{r}_T(w)\hat{n}(\omega_T(w))g_{sc}(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))^{-1}\hat{r}_{T,G'}(w)^{-1},$$

puis la cochaîne $t_{sc} = t_{T,sc}t_{\underline{T},sc}^{-1}$. On définit ensuite une cochaîne $\hat{V}_1 : W_F \to \hat{\mathfrak{T}}_1 \times \hat{\underline{\mathfrak{T}}}_1 \times \hat{T}_{sc}$ par $\hat{V}_1(w) = (\hat{V}_{\mathfrak{T}_1}(w), \hat{V}_{\underline{\mathfrak{T}}_1}(w), t_{sc}(w))$. Elle prend ses valeurs dans $\hat{S}_1$ et c'est un cocycle.

Le tore dual de U est $\hat{U} = (\hat{T}_{sc} \times \hat{\underline{T}}_{sc})/diag(Z(\hat{G}_{SC}))$, où $diag$ est le plongement diagonal. On fixe un élément s_{sc} ayant même image que s dans $\hat{G}_{AD}$ (rappelons que $\tilde{s} = s\hat{\theta}$). On définit l'élément $\mathbf{s} = (s_{sc}, s_{sc})$ de $\hat{U}$. On dispose de l'homomorphisme $1-\hat{\theta} : \hat{S}_1 \to \hat{U}$ dual de l'homomorphisme $1-\theta : U \to S_1$. On vérifie que le couple $(\hat{V}_1, \mathbf{s})$ appartient à $Z^{1,0}(W_F; \hat{S}_1 \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U})$.

D'après [KS1] A.3, on dispose d'un produit

$$< .,. >: H^{1,0}(\Gamma_F; U \stackrel{1-\theta}{\to} S_1) \times H^{1,0}(W_F; \hat{S}_1 \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}) \to \mathbb{C}^\times.$$

On pose

$$\mathbf{\Delta}_{imp}(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) =< (V, \boldsymbol{\nu}_1), (\hat{V}_1, \mathbf{s}) >^{-1},$$

en notant de la même façon les éléments de $Z^{1,0}$ et leurs images dans $H^{1,0}$.

La bijection $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ de $\Sigma(T)$ sur $\Sigma(\hat{T})$ induit une bijection $\alpha_{res} \mapsto \hat{\alpha}_{res}$ de $\Sigma(T)_{res,ind}$ sur $\Sigma(\hat{T})_{res,ind}$. On peut donc considérer nos χ-data comme des χ-data pour l'ensemble $\Sigma(T)_{res,ind}$. Considérons un élément de $\Sigma(T)_{res,ind}$ que l'on écrit α_{res}, avec $\alpha \in \Sigma(T)$. Puisque α_{res} est indivisible, α est du type 1 ou 2. On distingue les cas suivants :

(a) α est de type 1 et $(N\hat{\alpha})(s) \neq 1$, autrement dit $(\hat{\alpha})_{res} \notin \Sigma(\hat{T}')$;

(b) α est de type 2 et $(N\hat{\alpha})(s) \neq \pm 1$, autrement dit ni $(\hat{\alpha})_{res}$, ni $2(\hat{\alpha})_{res}$ n'appartiennent à $\Sigma(\hat{T}')$;

(c) α est de type 2 et $(N\hat{\alpha})(s) = -1$, autrement dit $2(\hat{\alpha})_{res} \in \Sigma(\hat{T}')$;

(d) α est de type 1 ou 2 et $(N\hat{\alpha})(s) = 1$.

On pose

$$\Delta_{II,\alpha_{res}}(\delta, \gamma) = \begin{cases} \chi_{\alpha_{res}}(\frac{(N\alpha)(\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}}), & \text{dans le cas (a),} \\ \chi_{\alpha_{res}}(\frac{(N\alpha)(\nu)^2-1}{a_{\alpha_{res}}}), & \text{dans le cas (b),} \\ \chi_{\alpha_{res}}((N\alpha)(\nu)+1), & \text{dans le cas (c),} \\ 1, & \text{dans le cas (d)} \end{cases}$$

Ce terme ne dépend que de l'orbite de α_{res} pour l'action de Γ_F. On pose

$$\Delta_{II}(\delta, \gamma) = \prod_{\alpha_{res}} \Delta_{II,\alpha_{res}}(\delta, \gamma),$$

où le produit porte sur les orbites de l'action de Γ_F dans $\Sigma(T)_{res,ind}$.

On définit alors le bifacteur de transfert

$$\mathbf{\Delta}_1(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) = \Delta_{II}(\delta, \gamma)\Delta_{II}(\underline{\delta}, \underline{\gamma})^{-1}\mathbf{\Delta}_{imp}(\delta_1, \gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}).$$

Remarques. (1) Ce terme est indépendant de tous les choix de données auxiliaires.

(2) On a rassemblé dans le facteur $\mathbf{\Delta}_{imp}$ les facteurs plus habituels Δ_I et Δ_{III}. Cela parce que l'on a fait disparaître le traditionnel groupe G^* qui nous semble inadapté à l'endoscopie tordue.

(3) On a tenté d'incorporer dans les définitions les changements de signes introduits dans [KS2] 5.4. On n'est pas sûr d'avoir réussi.

2.3 Bifacteur de transfert et K-groupes

On suppose ici $F=\mathbb{R}$, on considère un K-espace tordu comme en 1.11. On veut définir le bifacteur de transfert sur $\mathcal{D}_{K\tilde{G},1}\times\mathcal{D}_{K\tilde{G},1}$. On reprend les constructions précédentes. Du côté dual, il n'y a rien de changé, l'espace $K\tilde{G}$ n'intervenant pas. Du côté des groupes sur $\mathbb{R}$, les tores U et S_1 se définissent aussi bien si γ et $\underline{\gamma}$ appartiennent à des composantes connexes différentes de $K\tilde{G}(\mathbb{R})$ (il suffit pour les définir d'identifier les centres des différents groupes G_p). La seule chose à changer est la condition de cohérence imposée aux choix de e, $u_{\mathcal{E}}(\sigma)$, $\underline{e}$ et $u_{\underline{\mathcal{E}}}(\sigma)$. Dans le paragraphe précédent, on avait choisi $r\in G_{SC}$ tel que $ad_r(\mathcal{E})=\underline{\mathcal{E}}$. Supposons maintenant que $\gamma\in\tilde{G}_p(\mathbb{R})$ et $\underline{\gamma}\in\tilde{G}_{\underline{p}}(\mathbb{R})$. On choisit $r\in G_{\underline{p},SC}$ tel que $ad_r\circ\phi_{\underline{p},p}(\mathcal{E})=\underline{\mathcal{E}}$. On impose $\underline{e}=ad_r\circ\tilde{\phi}_{\underline{p},p}(e)$ et

$$u_{\underline{\mathcal{E}}}(\sigma)=r\phi_{\underline{p},p}(u_{\mathcal{E}}(\sigma))\nabla_{\underline{p},p}(\sigma)\sigma(r)^{-1}.$$

2.4 Transfert

Les données sont les mêmes qu'en 2.1. On fixe une mesure de Haar sur $G(F)$. Soit $\gamma\in\tilde{G}(F)$. On pose

$$D^{\tilde{G}}(\gamma)=|det(1-ad_{\gamma_{ss}})_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\gamma_{ss}}}|_F,$$

où γ_{ss} est la partie semi-simple de γ et $|.|_F$ la valeur absolue usuelle de F. On fixe une mesure de Haar sur $G_\gamma(F)$. Soit $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Dans le cas où ω est trivial sur $G_\gamma(F)$, on pose

$$I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2}\int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)}\omega(g)f(g^{-1}\gamma g)dg.$$

Dans le cas où ω n'est pas trivial sur $G_\gamma(F)$, on pose $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=0$.

Remarque. Il n'est pas clair que la normalisation que l'on a choisie soit la plus simple. On aurait pu intégrer sur $Z_G(\gamma;F)\backslash G(F)$ au lieu de $G_\gamma(F)\backslash G(F)$. Auquel cas, la condition sur ω serait d'être trivial sur $Z_G(\gamma;F)$. Notons que cela ne crée pas d'ambiguïté : si ω est trivial sur $G_\gamma(F)$ mais pas sur $Z_G(\gamma;F)$, l'intégrale sur $G_\gamma(F)\backslash G(F)$ est nulle.

On note $I(\tilde{G}(F),\omega)$ le quotient de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ par le sous-espace annulé par toutes les $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,.)$, γ très régulier.

Remarque. Dans le cas où ω est trivial, on supprime ω de la notation : $I^{\tilde{G}}(\gamma,f)$ et $I(\tilde{G}(F))$ au lieu de $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ et $I(\tilde{G}(F),\omega)$. D'autres simplifications similaires seront utilisées dans la suite.

On note $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ l'espace des fonctions $f_1:\tilde{G}'_1(F)\to\mathbb{C}$ telles que $f_1(c_1\delta_1)=\lambda_1(c_1)^{-1}f_1(\delta_1)$ pour $c_1\in C_1(F)$ et f_1 est lisse et à support compact modulo $C_1(F)$. On fixe une mesure de Haar sur $G'(F)$. Pour $\delta_1\in\tilde{G}'_1(F)$, on fixe une mesure de Haar sur $G'_\delta(F)$ et, pour $f_1\in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$, on pose :

$$I^{\tilde{G}'}(\delta_1,f_1)=D^{\tilde{G}'}(\delta)^{1/2}\int_{G'_\delta(F)\backslash G'(F)}f_1(x^{-1}\delta_1x)dx.$$

Si δ_1 est semi-simple fortement régulier, on pose

$$S^{\tilde{G}'}(\delta_1,f_1)=\sum_{\delta'_1}I^{\tilde{G}'}(\delta'_1,f_1),$$

où δ_1' parcourt la classe de conjugaison stable de δ_1 modulo conjugaison par $G'(F)$. On note $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}_1'(F))$ le quotient de $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1'(F))$ par le sous-espace annulé par toutes les $S^{\tilde{G}'}(\delta_1,.)$ pour δ_1 fortement régulier.

On fixe un facteur de transfert Δ_1. Soit $\delta_1 \in \tilde{G}_1'(F)$, semi-simple et fortement $\tilde{G}$-régulier. Pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tel que $(\delta_1,\gamma) \in \mathcal{D}_1$, il y a un homomorphisme naturel $G_\gamma(F) \to G'_\delta(F)$, qui est un revêtement sur son image. En choisissant un diagramme $(\delta, B', T', B, T, \gamma)$ comme en 1.10, c'est la restriction de $\xi_{T,T'}$ à $G_\gamma(F) = T^{\theta,0}(F)$. On fixe les mesures de Haar sur ces deux groupes, de sorte qu'elles se correspondent localement par cet isomorphisme. On pose

$$d(\theta^*) = |det(1-\theta^*)_{|\mathfrak{t}^*/(\mathfrak{t}^*)^{\theta^*}}|_F.$$

Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on pose

$$I^{\tilde{G}}(\delta_1, f) = d(\theta^*)^{1/2} \sum_\gamma \Delta_1(\delta_1,\gamma)[Z_G(\gamma;F) : G_\gamma(F)]^{-1} I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f),$$

où γ parcourt les éléments de $\tilde{G}(F)$ tels que $(\delta_1,\gamma) \in \mathcal{D}_1$, modulo conjugaison par $G(F)$. On montre ([KS1] lemme 4.4.C) que pour tous ces γ, ω est trivial sur $Z_G(\gamma;F)$, les termes $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ sont donc de véritables intégrales orbitales. Pour $f_1 \in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1'(F))$, on dit que f_1 est un transfert de f si et seulement si $S^{\tilde{G}'}(\delta_1, f_1) = I^{\tilde{G}}(\delta_1, f)$ pour tout δ_1 fortement $\tilde{G}$-régulier. On peut d'ailleurs aussi bien demander que cette égalité ne soit vérifiée que pour un sous-ensemble topologiquement dense. La conjecture de transfert est maintenant prouvée :

Théorème. *Tout élément de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ admet un transfert dans $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1'(F))$.*

Par passage aux quotients, le transfert apparaît comme une application linéaire $I(\tilde{G}(F),\omega) \to SI_{\lambda_1}(\tilde{G}_1'(F))$. Il dépend des choix des données auxiliaires, du facteur de transfert et des mesures de Haar. On peut s'affranchir de ce dernier choix en notant $Mes(G(F))$ la droite complexe portée par une mesure de Haar sur $G(F)$. On peut voir le transfert comme une application linéaire

$$I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F)) \to SI_{\lambda_1}(\tilde{G}_1'(F)) \otimes Mes(G'(F)).$$

2.5 Recollement de données auxiliaires

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Considérons des données G_1', $\tilde{G}_1'$, C_1, $\hat{\xi}_1$ comme en 2.1, plus un facteur de transfert Δ_1. On considère une autre série de données G_2', $\tilde{G}_2'$, C_2, $\hat{\xi}_2$, Δ_2. On introduit le produit fibré G_{12}' de G_1' et G_2' au-dessus de G'. On a $Z(\hat{G}_{12}') = (Z(\hat{G}_1') \times Z(\hat{G}_2'))/diag_-(Z(\hat{G}'))$. Pour $w \in W_F$, soit $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_w} agisse par $w_{G'}$ sur $\hat{G}'$ (on a modifié l'isomorphisme ${}^LG \simeq \hat{G} \rtimes W_F$ comme en 1.5 ; pour $i = 1,2$, on modifie de même les isomorphismes ${}^LG_i' \simeq \hat{G}_i' \rtimes W_F$ comme en 2.2). Pour $i = 1,2$, on a $\hat{\xi}_i(g_w) = (\zeta_i(w), w)$, avec $\zeta_i(w) \in Z(\hat{G}_i')$. Soit $\zeta_{12}(w)$ l'image de $(\zeta_1(w), \zeta_2(w)^{-1})$ dans $Z(\hat{G}_{12}')$. Ce terme est bien défini et ζ_{12} est un cocycle de W_F dans $Z(\hat{G}_{12}')$, qui détermine un caractère λ_{12} de $G_{12}'(F)$. La restriction de ce caractère à $C_1(F) \times C_2(F)$ est $\lambda_1 \times \lambda_2^{-1}$. Introduisons le produit fibré

$\tilde{G}'_{12}$ de $\tilde{G}'_1$ et $\tilde{G}'_2$ au-dessus de $\tilde{G}'$. Soient (δ_1,γ) et $(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})$ deux éléments de $\mathcal{D}_1$. Soient $\delta_2,\underline{\delta}_2\in\tilde{G}'_2(F)$ tels que (δ_1,δ_2) et $(\underline{\delta}_1,\underline{\delta}_2)$ appartiennent à $\tilde{G}'_{12}(F)$. Alors (δ_2,γ) et $(\underline{\delta}_2,\underline{\gamma})$ appartiennent à $\mathcal{D}_2$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$\boldsymbol{\Delta}_2(\delta_2,\gamma;\underline{\delta}_2,\underline{\gamma})=\lambda_{12}(x_1,x_2)\boldsymbol{\Delta}_1(\delta_1,\gamma;\underline{\delta}_1,\underline{\gamma}),$$

où $(x_1,x_2)\in G_{12}(F)$ est l'élément tel que $(\delta_1,\delta_2)=(x_1,x_2)(\underline{\delta}_1,\underline{\delta}_2)$.

Preuve. On calcule les bifacteurs de transfert en utilisant la définition de 2.2, en affectant d'un indice 2 les termes relatifs à la deuxième famille de données auxiliaires. Quand on remplace une famille par l'autre, les termes Δ_{II} ne changent pas et les termes V et $\mathbf{s}$ non plus. De même que l'on a défini les tores $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$, on introduit le tore $\mathfrak{T}_{12}$ qui est le produit fibré de T'_1, T'_2 et T au-dessus de T'. On note ν_{12} l'élément (μ_1,μ_2,ν) de ce tore. On introduit le groupe $\mathfrak{Z}_{12}$ formé des $(z_1,z_2,z)\in Z(G'_1)\times Z(G'_2)\times Z(G)$ qui ont même image dans $Z(G')$ puis le tore $S_{12}=(\mathfrak{T}_{12}\times\underline{\mathfrak{T}}_{12})/diag_-(\mathfrak{Z}_{12})$. Notons $\boldsymbol{\nu}_{12}$ l'image de $(\nu_{12},\underline{\nu}_{12}^{-1})$ dans S_{12}. L'oubli d'une variable définit des homomorphismes

$$\begin{tikzcd} & S_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ S_1 & & S_2 \end{tikzcd}$$

qui envoient $\boldsymbol{\nu}_{12}$ respectivement sur $\boldsymbol{\nu}_1$ et $\boldsymbol{\nu}_2$. D'où des homomorphismes

$$\begin{tikzcd} & H^{1,0}(\Gamma_F,U\overset{1-\theta}{\to}S_{12}) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ H^{1,0}(\Gamma_F,U\overset{1-\theta}{\to}S_1) & & H^{1,0}(\Gamma_F,U\overset{1-\theta}{\to}S_2) \end{tikzcd}$$

qui envoient $(V,\boldsymbol{\nu}_{12})$ respectivement sur $(V,\boldsymbol{\nu}_1)$ et $(V,\boldsymbol{\nu}_2)$. Il y a des homomorphismes duaux

$$\begin{tikzcd} H^{1,0}(W_F;\hat{S}_1\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}) & & H^{1,0}(W_F;\hat{S}_2\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}) \\ & H^{1,0}(W_F;\hat{S}_{12}\overset{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}) \arrow[ul, "\hat{p}_1"] \arrow[ur, "\hat{p}_2"'] & \end{tikzcd}$$

D'après les propriétés de compatibilité des produits de groupes de cohomologie, on a les égalités

$$<(V,\boldsymbol{\nu}_1),(\hat{V}_1,\mathbf{s})>=<(V,\boldsymbol{\nu}_{12}),\hat{p}_1(\hat{V}_1,\mathbf{s})>,$$

$$<(V,\boldsymbol{\nu}_2),(\hat{V}_2,\mathbf{s})>=<(V,\boldsymbol{\nu}_{12}),\hat{p}_2(\hat{V}_2,\mathbf{s})>.$$

En posant

$$X=\boldsymbol{\Delta}_2(\delta_2,\gamma;\underline{\delta}_2,\underline{\gamma})\boldsymbol{\Delta}_1(\delta_1,\gamma;\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})^{-1},$$

on obtient

$$X=<(V,\boldsymbol{\nu}_{12}),\hat{p}_1(\hat{V}_1,\mathbf{s})\hat{p}_2(\hat{V}_2,\mathbf{s})^{-1}>.$$

Le tore $\hat{\mathfrak{T}}_{12}$ dual de $\mathfrak{T}_{12}$ est le quotient de $\hat{T}'_1\times\hat{T}'_2\times\hat{T}$ par le sous-groupe

$$\{(\hat{\xi}_1(t'_1),\hat{\xi}_2(t'_2),t');t'_1,t'_2,t'\in\hat{T}',t'_1t'_2t'=1\}.$$

Pour $w \in W_F$, notons encore $\zeta_{12}(w)$ l'image de $(\zeta_1(w), \zeta_2(w)^{-1}, 1)$ dans ce tore. Alors ζ_{12} est un cocycle. Le tore dual $\hat{S}_{12}$ de S_{12} est le groupe des $(t, \underline{t}, t_{sc}) \in \hat{\mathfrak{T}}_1 \times \hat{\mathfrak{T}}_2 \times \hat{T}_{sc}$ tels que $t\underline{t}^{-1} = j(t_{sc})$, en généralisant la notation j de 2.2. Notons $\hat{V}_{12}$ le cocycle $w \mapsto (\zeta_{12}(w), \zeta_{12}(w), 1)$ de W_F dans $\hat{S}_{12}$. On calcule $\hat{p}_1(\hat{V}_1, \mathbf{s})\hat{p}_2(\hat{V}_2, \mathbf{s})^{-1}$: c'est la classe de l'élément $(\hat{V}_{12}, 1) \in Z^{1,0}(W_F; \hat{S}_{12} \stackrel{1-\theta}{\to} \hat{U})$. D'où

$$X =< (V, \boldsymbol{\nu}_{12}), (\hat{V}_{12}, 1) > .$$

Introduisons le produit fibré T'_{12} de T'_1 et T'_2 au-dessus de T', qui n'est autre que le commutant de (δ_1, δ_2) dans G'_{12}. Introduisons le tore $\Sigma_{12} = (T'_{12} \times \underline{T}'_{12})/diag_-(Z(G'_{12}))$. Il y a un homomorphisme naturel $q : S_{12} \to \Sigma_{12}$. Dualement, on a $\hat{T}'_{12} = (\hat{T}'_1 \times \hat{T}'_2)/diag_-(\hat{T}')$ et

$$\hat{\Sigma}_{12} = \{(t, \underline{t}, t'_{sc}) \in \hat{T}'_{12} \times \hat{\underline{T}}'_{12} \times \hat{T}'_{sc}; j(t'_{sc}) = t\underline{t}^{-1}\},$$

où on note encore j l'homomorphisme naturel et où $\hat{T}'_{sc}$ est l'image réciproque de $\hat{T}'$ dans $\hat{G}'_{SC}$. On a une suite d'homomorphismes

$$Z(\hat{G}'_{12}) \stackrel{diag}{\to} \hat{\Sigma}_{12} \stackrel{\hat{q}}{\to} \hat{S}_{12}.$$

L'homomorphisme $\hat{q}$ prend ses valeurs dans le noyau de $1 - \hat{\theta}$. Il y a donc un homomorphisme naturel

$$H^1(W_F, \hat{\Sigma}_{12}) \to H^{1,0}(W_F; \hat{S}_{12} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}).$$

L'élément $\hat{V}_{12}$ est l'image par cet homomorphisme de $diag(\zeta_{12})$. En vertu de la relation de compatibilité [KS1] (A.3.13) (où le signe négatif disparaît d'après la correction [KS2] 4.3), on obtient

$$X =< q(\boldsymbol{\nu}_{12}), diag(\zeta_{12}) >,$$

où le produit est celui sur $H^0(\Gamma_F; \Sigma_{12}) \times H^1(W_F; \hat{\Sigma}_{12})$. Le tore Σ_{12} est un sous-tore maximal du groupe $\mathfrak{G}'_{12} = (G'_{12} \times G'_{12})/diag_-(Z(G'_{12}))$. L'homomorphisme $diag : Z(\hat{G}'_{12}) \to \hat{\Sigma}_{12}$ se factorise en

$$Z(\hat{G}'_{12}) \stackrel{\iota}{\to} Z(\hat{\mathfrak{G}}'_{12}) \to \hat{\Sigma}_{12}.$$

On se rappelle que tout élément de $H^1(W_F; Z(\hat{\mathfrak{G}}'_{12}))$ définit un caractère de $\mathfrak{G}'_{12}(F)$. Donc

$$X = \omega_{12}(q(\boldsymbol{\nu}_{12})),$$

où ω_{12} est le caractère de $\mathfrak{G}'_{12}(F)$ défini par $\iota(\zeta_{12})$. Remarquons que

$$q(\boldsymbol{\nu}_{12}) = ((\delta_1, \delta_2), (\underline{\delta}_1^{-1}, \underline{\delta}_2^{-1})),$$

en identifiant ce quadruplet à son image naturelle dans $\mathfrak{G}'_{12}(F)$. On peut décomposer

$$q(\boldsymbol{\nu}_{12}) = ((x_1, x_2), (1, 1))diag_-(\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2).$$

On a un homomorphisme

$$G'_{12} \times G'_{12} \to \mathfrak{G}'_{12}.$$

Par composition avec cet homomorphisme, ω_{12} définit un caractère de $G'_{12}(F) \times G'_{12}(F)$. D'après les propriétés usuelles de compatibilité, ce dernier caractère est égal à $\lambda_{12} \times \lambda_{12}$. D'où $\omega_{12}((x_1, x_2), (1, 1)) = \lambda_{12}(x_1, x_2)$. Pour achever la preuve du lemme, il reste à prouver que $\omega_{12}(diag_-(\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2)) = 1$. On peut dire que $\omega_{12}(diag_-(\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2))$ est la valeur de notre quotient X quand les triplets $(\delta_1, \delta_2, \gamma)$ et $(\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2, \underline{\gamma})$ sont égaux et qu'alors ce quotient vaut 1 car, d'après [KS1] lemme 5.1.A, les deux termes $\boldsymbol{\Delta}_1(\delta_1,\gamma;\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})$ et $\boldsymbol{\Delta}_2(\delta_2,\gamma;\underline{\delta}_2,\underline{\gamma})$ valent 1. On peut dire aussi que $diag_-(\underline{\delta}_1,\underline{\delta}_2)$ appartient à l'image de l'homomorphisme naturel

$$\underline{T}'_{12}/Z(G'_{12}) \stackrel{diag_-}{\to} (\underline{T}'_{12}\times\underline{T}'_{12})/diag_-(Z(G'_{12}))$$

Or, d'après sa construction, $\iota(\zeta_{12})$ est annulé par l'homomorphisme dual. $\square$

Grâce à ce lemme, il existe une unique fonction $\tilde{\lambda}_{12}$ sur $\tilde{G}'_{12}(F)$ telle que

(i) pour $(\delta_1,\delta_2)\in\tilde{G}'_{12}(F)$ et $(x_1,x_2)\in G'_{12}(F)$, $\tilde{\lambda}_{12}(x_1\delta_1,x_2\delta_2)=\lambda_{12}(x_1,x_2)\tilde{\lambda}_{12}(\delta_1,\delta_2)$ (on abrégera cette propriété en disant que $\tilde{\lambda}_{12}$ se transforme selon le caractère λ_{12}) ;

(ii) pour $(\delta_1,\gamma)\in\mathcal{D}_1$ et $\delta_2\in\tilde{G}'_2(F)$ tel que $(\delta_1,\delta_2)\in\tilde{G}'_{12}(F)$, $\Delta_2(\delta_2,\gamma)=\tilde{\lambda}_{12}(\delta_1,\delta_2)\Delta_1(\delta_1,\gamma)$.

On définit une application linéaire

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)) & \to & C^\infty_{c,\lambda_2}(\tilde{G}'_2(F)) \\ f_1 & \mapsto & f_2 \end{array}$$

par $f_2(\delta_2)=\tilde{\lambda}_{12}(\delta_1,\delta_2)f_1(\delta_1)$, où δ_1 est n'importe quel élément tel que $(\delta_1,\delta_2)\in\tilde{G}'_{12}(F)$. C'est un isomorphisme qui se descend en un isomorphisme de $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ sur $SI_{\lambda_2}(\tilde{G}'_2(F))$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & I(\tilde{G}(F),\omega) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)) & & \simeq & & SI_{\lambda_2}(\tilde{G}'_2(F)) \end{array}$$

est commutatif, où les deux flèches descendantes sont les transferts.

On a envie de définir $C^\infty_c(\mathbf{G}')$ et $SI(\mathbf{G}')$ comme les limites inductives des $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$, resp. $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$, la limite étant prise sur toutes les données G'_1, ...,Δ_1, les applications de transition étant celles que l'on vient de définir. Alors le transfert devient une application linéaire

$$I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))\to SI(\mathbf{G}')\otimes Mes(G'(F)),$$

qui ne dépend plus d'aucune donnée auxiliaire. La construction pose un problème de logique car nos données auxiliaires ne forment pas un ensemble : l'ensemble des groupes n'existe pas. Il y a plusieurs moyens de résoudre cette difficulté. L'un, que l'on se contentera d'esquisser, consiste à fixer un ensemble de couples $(G,\tilde{G})$ vérifiant les hypothèses de 1.5, stable par quelques opérations élémentaires (le produit de deux couples de l'ensemble appartient à l'ensemble, un sous-objet d'un élément de l'ensemble appartient à l'ensemble...) et tel que, pour tout couple vérifiant les hypothèses de 1.5, il existe un couple isomorphe appartenant à l'ensemble. Un tel ensemble existe puisque pour tout entier n, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de couples tels que $dim(G)=n$. On se limite ensuite à ne considérer que des couples appartenant à l'ensemble fixé. Un autre moyen plus simple pour résoudre le problème est de dire qu'une fois fixé le groupe G et l'espace tordu $\tilde{G}$, les données $\mathbf{G}'$ que l'on rencontrera au cours de notre travail seront sinon en nombre fini, du moins déduites des données initiales par un nombre fini d'opérations. Elles restent dans un ensemble. On peut donc pour chacune d'elles fixer arbitrairement des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 et définir $C^\infty_c(\mathbf{G}')$ et $SI(\mathbf{G}')$ comme étant les espaces $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$, resp. $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ pour ces données particulières. L'important est que, quand interviendront d'autres données auxiliaires, on identifiera les espaces associés à ces données à $C_c^\infty(\mathbf{G}')$ et $SI(\mathbf{G}')$ par les isomorphismes définis ci-dessus.

Remarquons que les notions suivantes ont un sens :

- le support dans $\tilde{G}'(F)$ d'un élément de $C_c^\infty(\mathbf{G}')$: on réalise cet élément dans un espace $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1)$; la projection dans $\tilde{G}'(F)$ de son support ne dépend pas des données auxiliaires ;

- la multiplication d'un élément de $C_c^\infty(\mathbf{G}')$ par une fonction lisse sur $\tilde{G}'(F)$ (par le même argument).

Cas particulier. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, cf. 1.7. On dispose de la donnée endoscopique maximale $\mathbf{G}=(G,{}^LG,\tilde{s}=1)$. Pour cette donnée, on peut choisir pour données auxiliaires $G'_1=G$, $\tilde{G}'_1=\tilde{G}$ et Δ_1 valant 1 sur les couples qui se correspondent. Les espaces $C_c^\infty(\mathbf{G})$ et $SI(\mathbf{G})$ sont simplement $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $SI(\tilde{G}(F))$.

2.6 Action de groupes d'automorphismes

Soient $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante, $\underline{\mathbf{G}'}=(\underline{G'},\underline{\mathcal{G}'},\underline{\tilde{s}})$ une donnée équivalente et $x\in\hat{G}$ définissant l'équivalence. Soit $\alpha_x:G'\to\underline{G'}$ un isomorphisme associé à x, cf. 1.5. Remarquons que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Z(G) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ Z(G') & & \stackrel{\alpha_x}{\to} & & Z(\underline{G'}) \end{array}$$

est commutatif, donc de α_x se déduit un isomorphisme $\tilde{\alpha}_x:\tilde{G}'=G'\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})\to\underline{\tilde{G}'}=\underline{G'}\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})$.

Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 relatives à la première donnée. On pose $\underline{G'_1}=G'_1$, $\underline{C}_1=C_1$, avec pour application $\underline{G'_1}\to\underline{G'}$ la composée de $G'_1\to G'$ et de $\alpha_x:G'\to\underline{G'}$. On pose $\underline{\tilde{G}'_1}=\tilde{G}'_1$, avec pour application $\underline{\tilde{G}'_1}\to\underline{\tilde{G}'}$ la composée de $\tilde{G}'_1\to\tilde{G}'$ et de $\tilde{\alpha}_x:\tilde{G}'\to\underline{\tilde{G}'}$. On pose $\underline{\hat{\xi}_1}=\hat{\xi}_1\circ ad_{x^{-1}}:\underline{\mathcal{G}'}\to{}^L\underline{G'_1}={}^LG'_1$. Ces données vérifient les conditions requises relativement à la donnée $\underline{\mathbf{G}'}$. On vérifie que les bifacteurs de transfert déduits de ces deux séries de données coïncident. Donc la fonction $\underline{\Delta}_1=\Delta_1$ est encore un facteur de transfert pour ces données auxiliaires. On a alors un isomorphisme

$$C_c^\infty(\mathbf{G}')\simeq C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F))=C_{c,\lambda_1}^\infty(\underline{\tilde{G}'_1}(F))\simeq C_c^\infty(\underline{\mathbf{G}'}).$$

On en déduit un isomorphisme $SI(\mathbf{G}')\simeq SI(\underline{\mathbf{G}'})$. Par construction, il est compatible au transfert, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & I(\tilde{G}(F),\omega) & & \\ & \text{transfert}\swarrow & & \searrow\text{transfert} & \\ SI(\mathbf{G}') & & \simeq & & SI(\underline{\mathbf{G}'}) \end{array}$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{G}'=\underline{\mathbf{G}'}$, on peut identifier $\mathcal{E}'^*$ à une paire de Borel épinglée définie sur F (puisque G' est quasi-déployée) puis préciser α_x en imposant que cet automorphisme préserve cette paire de Borel épinglée. On obtient une action du groupe $Aut(\mathbf{G}')$ sur $C_c^\infty(\mathbf{G}')$.

Remarque. Comme me l'a fait remarquer Chaudouard, cette action dépend du choix de la paire de Borel épinglée, qui n'est déterminé que modulo l'action de $G'_{AD}(F)$. L'action devient canonique dans deux cas :

- quand on passe à un quotient où cette action disparaît, par exemple l'action sur l'espace $SI(\mathbf{G}')$ est canonique ;

- si on se restreint aux x pour lesquels $\alpha_x = 1$.

On vérifie que le sous-groupe $Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\hat{G}'$ de $Aut(\mathbf{G}')$ agit trivialement. On a donc une action de $Aut(\mathbf{G}')/\hat{G}'$ et en particulier de son sous-groupe $(Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}))^{\Gamma_F}$. On a vu en 1.13 comment associer à un élément x de ce groupe un caractère μ_x de $G_{0,ab}(F)$ et une fonction $\tilde{\mu}_x$ sur $\tilde{G}_{0,ab}(F)$.

Lemme. *Pour $x \in Z(\hat{G})$ tel que $x(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})$ soit fixe par Γ_F, l'action de x sur $C_c^\infty(\mathbf{G}')$ est la multiplication par la fonction $\tilde{\mu}_x \circ N^{\tilde{G}',\tilde{G}}$.*

Preuve. Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 dont on déduit, à l'aide de x, de nouvelles données comme ci-dessus. Mais, au lieu de les souligner, on note ces nouvelles données G'_2,...,Δ_2. En fait, ces données sont les mêmes que les premières, sauf $\hat{\xi}_1$ qui est remplacé par $\hat{\xi}_2 = \hat{\xi}_1 \circ ad_{x^{-1}}$. L'action de x sur $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ est la composée de l'identité de cet espace sur $C_c^\infty(\tilde{G}'_2(F), \lambda_2)$ et de l'application de transition de ce deuxième espace sur le premier définie au paragraphe précédent. Autrement dit, c'est la multiplication par la fonction $\delta_1 \mapsto \tilde{\lambda}_{21}(\delta_1, \delta_1)$. Cette fonction se transforme selon le caractère $g_1 \mapsto \lambda_{21}(g_1, g_1)$ de $G'_1(F)$. Celui-ci est associé au cocycle $w \mapsto (\zeta_2(w), \zeta_1(w)^{-1})$ de W_F dans $Z(\hat{G}'_{12})$. Avec les notations de 2.2, on a $(\zeta_2(w), w) = \hat{\xi}_2(g(w), w) = \hat{\xi}_1(x^{-1}w(x)g(w), w)$, d'où $\zeta_2(w) = \hat{\xi}_1(w(x)x^{-1})\zeta_1(w)$. Notre cocycle est donc le produit des deux cocycles $w \mapsto (\zeta_1(w), \zeta_1(w)^{-1})$ et $w \mapsto (\hat{\xi}_1(w(x)x^{-1}), 1)$. On voit comme dans la preuve de 2.5 que le premier vaut 1 sur la diagonale de $G'_{21}(F)$. Le deuxième définit le caractère composé de la projection de $G'_{21}(F)$ sur $G'(F)$ et du caractère de ce dernier groupe associé au cocycle $w \mapsto w(x)x^{-1}$. Ce dernier caractère est le composé de μ_x et de l'homomorphisme $G'(F) \to G'_{ab}(F) \to G'_{0,ab}(F)$. Cela démontre que notre fonction $\delta_1 \mapsto \tilde{\lambda}_{21}(\delta_1, \delta_1)$ se transforme selon le même caractère que la fonction $\tilde{\mu}_x \circ N^{\tilde{G}',\tilde{G}}$ (ou plus exactement que cette fonction composée avec la projection $G'_1(F) \to G'(F)$). Pour que ces deux fonctions soient égales, il suffit qu'elles le soient en un point. Puisque $\Delta_2 = \Delta_1$ et que la multiplication par la fonction de transition envoie Δ_2 sur Δ_1, on a $\tilde{\lambda}_{21}(\delta_1, \delta_1) = 1$ pour tout δ_1 qui est composante d'un couple $(\delta_1, \gamma) \in \mathcal{D}_1$. Pour un tel δ_1, on a aussi $\tilde{\mu}_x \circ N^{\tilde{G},\tilde{G}}(\delta) = 1$ d'après la définition de $\tilde{\mu}_x$ et la proposition 1.14(i). Or un tel δ_1 existe puisque $\mathbf{G}'$ est relevante. $\square$

Corollaire. *Un élément de $C_c^\infty(\mathbf{G}')$ est invariant par l'action de $(Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F}$ si et seulement si son support est contenu dans l'ensemble des $\delta \in \tilde{G}'(F)$ tels que $N^{\tilde{G}',\tilde{G}}(\delta)$ appartienne à $N^{\tilde{G}}(\tilde{G}_{ab}(F))$.*

2.7 Une propriété de transformation du facteur de transfert

Posons $G_\sharp = G/Z(G)^\theta$. Le groupe $G_\sharp(F)$ agit par conjugaison sur $\tilde{G}(F)$. Soit (B, T) une paire de Borel de G. On a l'égalité $Z(G)^\theta = Z(G) \cap T^\theta$, où θ désigne la restriction de ad_γ à T pour n'importe quel $\gamma \in \tilde{G}$ tel que ad_γ conserve (B, T). D'où une suite exacte

$$(1) \qquad 1 \to T/Z(G)^\theta \to T/T^\theta \times T_{ad} \to T_{ad}/T^\theta_{ad} \to 1.$$

La deuxième flèche est le produit des applications naturelles. La première est le produit de l'application naturelle $T/Z(G)^\theta \to T_{ad}$ et de l'inverse de l'application naturelle $T/Z(G)^\theta \to T/T^\theta$. En identifiant T/T^θ à $(1-\theta)(T)$ par l'homomorphisme $1-\theta$ et en identifiant de même T_{ad}/T_{ad}^θ à $(1-\theta)(T_{ad})$, on obtient une suite exacte

$$1 \to T/Z(G)^\theta \to (1-\theta)(T) \times T_{ad} \to (1-\theta)(T_{ad}) \to 1.$$

Dualement, en fixant une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$ de $\hat{G}$ et en utilisant les notations de 1.4, un tore maximal $\hat{T}_\sharp$ de $\hat{G}_\sharp$ s'insère dans une suite exacte

$$(2) \qquad 1 \to \hat{T}_{sc}/\hat{T}_{sc}^{\hat{\theta}} \stackrel{(\pi,1-\hat{\theta})}{\to} \hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0} \times \hat{T}_{sc} \to \hat{T}_\sharp \to 1.$$

Dualement à l'homomorphisme $T_{sc} \to T/Z(G)^\theta$, on dispose d'un homomorphisme $\hat{T}_\sharp \to \hat{T}_{ad}$. Puisque $Z(\hat{G}_\sharp)$ est le noyau de cet homomorphisme, on déduit aisément de la suite ci-dessus la suite exacte

$$1 \to Z(\hat{G}_{SC})/Z(\hat{G}_{SC})^{\hat{\theta}} \stackrel{(\pi,1-\hat{\theta})}{\to} Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}) \times Z(\hat{G}_{SC}) \to Z(\hat{G}_\sharp) \to 1.$$

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On suppose que $\hat{\mathcal{E}}$ est adaptée à cette donnée, cf. 1.5. En particulier $\tilde{s} = s\hat{\theta}$, avec $s \in \hat{T}$. Pour $w \in W_F$, soit $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_w} agisse par $w_{G'}$ sur $\hat{G}'$. Choisissons $z(w) \in Z(\hat{G})$ et $g_{sc}(w) \in \hat{G}_{SC}$ tels que $g(w) = z(w)\pi(g_{sc}(w))$. Choisissons $s_{sc} \in \hat{G}_{SC}$ qui a même image que s dans $\hat{G}_{AD}$. On définit $a_{sc}(w) \in \hat{G}_{SC}$ par

$$s_{sc}\hat{\theta}(g_{sc}(w))w(s_{sc})^{-1} = a_{sc}(w)g_{sc}(w).$$

On note $z_\sharp(w)$ l'image de $(z(w), a_{sc}(w))$ dans $Z(\hat{G}_\sharp)$ par l'application de la suite ci-dessus. Ce terme est bien défini et $z_\sharp$ est un cocycle, qui définit un caractère $\omega_\sharp$ de $G_\sharp(F)$.

Attention : le caractère $\omega_\sharp$ dépend de la donnée endoscopique.

Soient G'_1,...,Δ_1 des données auxiliaires.

Lemme. *Pour $(\delta_1, \gamma) \in \mathcal{D}_1$ et $x \in G_\sharp(F)$, on a*

$$\Delta_1(\delta_1, x^{-1}\gamma x) = \omega_\sharp(x)\Delta_1(\delta_1, \gamma).$$

Preuve. Il s'agit de calculer $\mathbf{\Delta}_1(\delta_1, x^{-1}\gamma x; \delta_1, \gamma)$. Choisissons une décomposition $x = z\pi(x_{sc})$, avec $z \in Z(G)$ et $x_{sc} \in G_{SC}$. Reprenons les constructions de 2.2. Si $(\delta, B', T', B, T, x^{-1}\gamma x)$ est le diagramme relatif à $(\delta, x^{-1}\gamma x)$, on prend $(\delta, B', T', ad_x(B), ad_x(T), \gamma)$ pour diagramme relatif à (δ, γ) et $r = x_{sc}$. D'où $u_{\mathcal{E}}(\sigma) = x_{sc}^{-1}u_{\underline{\mathcal{E}}}(\sigma)\sigma(x_{sc})$. On en déduit

$$V_T(\sigma) = x_{sc}^{-1}V_{\underline{T}}(\sigma)\sigma(x_{sc}) = x_{sc}^{-1}V_{\underline{T}}(\sigma)x_{sc}\mathbf{x}_{sc}(\sigma)^{-1},$$

où on a posé $\mathbf{x}_{sc}(\sigma) = \sigma(x_{sc})^{-1}x_{sc}$. On a aussi $x^{-1}\gamma x = z^{-1}x_{sc}^{-1}\underline{\nu e}x_{sc}z = z^{-1}\theta(z)x_{sc}^{-1}\underline{\nu}x_{sc}e$, d'où $\nu = z^{-1}\theta(z)x_{sc}^{-1}\underline{\nu}x_{sc}$. Le couple $(\mathbf{x}_{sc}, z)$ appartient à $Z^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc} \to T/Z(G)^\theta)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T_{sc} & \to & T/Z(G)^\theta \\ \downarrow & & \downarrow 1-\theta \\ U & \stackrel{1-\theta}{\to} & S_1 \end{array}$$

d'où un homomorphisme

$$(3)\qquad H^{1,0}(\Gamma_F;T_{sc}\to T/Z(G)^\theta)\to H^{1,0}(\Gamma_F;U\stackrel{1-\theta}{\to}S_1).$$

Le terme $(V,\boldsymbol{\nu}_1)$ est le produit de l'inverse de l'image de $(\mathbf{x}_{sc},z)$ par cet homomorphisme et d'un élément $(V',\boldsymbol{\nu}'_1)$ qu'il est facile de reconnaître : en identifiant T à $\underline{T}$ par $ad_{x_{sc}}$, $(V',\boldsymbol{\nu}'_1)$ est le cocycle associé au quadruplet diagonal $(\delta_1,\gamma;\delta_1,\gamma)$. Du côté dual, la conjugaison par x ne se voit pas et le cocycle $(\hat{V}_1,\mathbf{s})$ est le même que celui associé à cette paire diagonale. On a donc

$$<(V',\boldsymbol{\nu}'_1),(\hat{V}_1,\mathbf{s})>=\boldsymbol{\Delta}_1(\delta_1,\gamma;\delta_1,\gamma)^{-1}=1.$$

Donc $\boldsymbol{\Delta}_1(\delta_1,x^{-1}\gamma x;\delta_1,\gamma)$ est le produit de $(\mathbf{x}_{sc},z)$ et de l'image dans $H^{1,0}(W_F;\hat{T}_\sharp\to\hat{T}_{ad})$ de $(\hat{V}_1,\mathbf{s})$ par l'homomorphisme dual de (3). Par l'homomorphisme

$$\hat{T}\to\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0},$$

le cocycle t_T définit un cocycle à valeurs dans $\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, que nous notons t'_T. Le cocycle $((t'_T)^{-1},1)$ à valeurs dans $\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}\times\hat{T}_{sc}$ se descend par la suite (2) en un cocycle $\hat{V}'_1$ à valeurs dans $\hat{T}_\sharp$. Notons s_{ad} l'image de s dans $\hat{T}_{ad}$. On voit que l'image de $(\hat{V}_1,\mathbf{s})$ dans $H^{1,0}(W_F;\hat{T}_\sharp\to\hat{T}_{ad})$ est la classe du couple $(\hat{V}'_1,s_{ad})$.

Remarque. L'inversion de t'_T provient du fait que, dans la suite (1), l'homomorphisme $T/Z(G)^\theta\to T/T^\theta$ est l'inverse de l'homomorphisme naturel.

Notons $t'_{T_{sc}}$ l'image de la cochaîne $t_{T_{sc}}$ par l'homomorphisme

$$\hat{T}_{sc}\to\hat{T}_{sc}/\hat{T}_{sc}^{\hat{\theta}}.$$

On ne change pas $\hat{V}'_1$ en multipliant la cochaîne $((t'_T)^{-1},1)$ par l'image par le premier homomorphisme de la suite (2) de la cochaîne $t'_{T_{sc}}$, autrement dit en remplaçant $((t'_T)^{-1},1)$ par $((t'_T)^{-1}\pi(t'_{T_{sc}}),(1-\hat{\theta})(t'_{T_{sc}}))$. On a

$$t'_T(w)^{-1}\pi(t'_{T_{sc}}(w))=z(w).$$

Les termes $\hat{r}_T(w)$, $\hat{n}(\omega_T(w))$ et $\hat{r}_{T,G'}(w)$ sont invariants par $\hat{\theta}$. D'où

$$(1-\hat{\theta})(t'_{T_{sc}}(w))=\hat{\theta}(\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))g_{sc}(w))g_{sc}(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))^{-1}.$$

On peut remplacer $\hat{\theta}$ par $ad_{s_{sc}^{-1}}\circ ad_{s_{sc}}\circ\hat{\theta}$. Or $ad_{s_{sc}}\circ\hat{\theta}$ fixe $\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))$ (par définition de $\hat{G}'$) et envoie $g_{sc}(w)$ sur $a_{sc}(w)g_{sc}(w)w_G(s_{sc})s_{sc}^{-1}$. D'où

$$(1-\hat{\theta})(t'_{T_{sc}}(w))=s_{sc}^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))a_{sc}(w)g_{sc}(w)w_G(s_{sc})g_{sc}(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))^{-1}.$$

Le terme $a_{sc}(w)$ est central. Le composé de la conjugaison par $\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))g_{sc}(w)$ et de l'opérateur w_G n'est autre que l'opérateur w_T. On obtient

$$(1-\hat{\theta})(t'_{T_{sc}}(w))=s_{sc}^{-1}w_T(s_{sc})a_{sc}(w).$$

Le cocycle $\hat{V}'_1$ est donc l'image naturelle de $z_\sharp$ par l'homomorphisme $Z(\hat{G}_\sharp)\to\hat{T}_\sharp$ et de l'image naturelle du cocycle $w\mapsto s_{sc}^{-1}w_T(s_{sc})\in\hat{T}_{sc}$. Or le couple formé de cette image et de s_{ad} est un cobord. Donc la classe de $(\hat{V}'_1, s_{ad})$ est égale à l'image de $z_\sharp$ par l'homomorphisme

$$H^1(W_F; Z(\hat{G}_\sharp)) \to H^{1,0}(W_F; \hat{T}_\sharp \to \hat{T}_{ad}).$$

D'autre part, le couple $(\mathbf{x}_{sc}, z)$ est l'image naturelle de $x \in G_\sharp(F)$ par la suite d'applications

$$G_\sharp(F) \to G_{\sharp,ab}(F) \simeq H^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc} \to T/Z(G)^\theta).$$

D'après 1.13, le produit de $(\mathbf{x}_{sc}, z)$ et de $(\hat{V}'_1, s_{ad})$ est égal à $\omega_\sharp(x)$. $\square$

2.8 Le cas $F = \mathbb{R}$

On suppose $F = \mathbb{R}$. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On fixe des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1. Le groupe $W_\mathbb{R}$ contient $W_\mathbb{C} = \mathbb{C}^\times$ comme sous-groupe d'indice 2. Pour $w \in W_\mathbb{C}$, soit $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_w} agisse sur $\hat{G}'$ comme $w_{G'}$, c'est-à-dire par l'identité. Nécessairement, $g(w)$ appartient à $\hat{T}$. On a aussi $\hat{\xi}_1(g_w) = (\zeta_1(w), w)$, avec $\zeta_1(w) \in Z(\hat{G}'_1) \subset \hat{T}'_1$. Notons $\hat{\mathfrak{T}}$ le quotient de $\hat{T}'_1 \times \hat{T}$ par l'image de $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ plongé par $t \mapsto (\xi_1(t), t^{-1})$. On note $\rho(w)$ l'image de $(\zeta_1(w)^{-1}, g(w))$ dans $\hat{\mathfrak{T}}$. Cette image ne dépend pas du choix de g_w et l'application ρ ainsi définie est un homomorphisme continu de $\mathbb{C}^\times$ à valeurs dans $\hat{\mathfrak{T}}$. Rappelons les propriétés suivantes, valables pour tout tore complexe $\hat{T}$. A tout élément $b \in X_*(\hat{T}) \otimes \mathbb{C}$ est associé un homomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\hat{T}$: on écrit $b = \sum_{i=1,\dots,n} s_i b_i$ avec des $b_i \in X_*(\hat{T})$ et des s_i complexes ; pour $x \in \mathbb{R}_{>0}$, on pose $b(x) = \prod_{i=1,\dots,n} b_i(x^{s_i})$. Si λ est un homomorphisme continu de $\mathbb{C}^\times$ dans un tore complexe $\hat{T}$, il existe d'uniques b_λ, $b'_\lambda \in X_*(\hat{T}) \otimes \mathbb{C}$ de sorte que $b_\lambda - b'_\lambda \in X_*(\hat{T})$ et $\lambda(w) = (b_\lambda - b'_\lambda)(w) b'_\lambda(w\bar{w})$ pour tout $w \in \mathbb{C}^\times$. A notre homomorphisme ρ sont ainsi associés b_ρ et $b'_\rho \in X_*(\hat{\mathfrak{T}}) \otimes \mathbb{C}$. On a une suite exacte

$$0 \to X_*(\hat{T}^{\hat{\theta},0}) \otimes \mathbb{C} \stackrel{x \mapsto (\hat{\xi}_1(x), -x)}{\to} (X_*(\hat{T}'_1) \otimes \mathbb{C}) \oplus (X_*(\hat{T}) \otimes \mathbb{C}) \stackrel{\hat{p}}{\to} X_*(\hat{\mathfrak{T}}) \otimes \mathbb{C} \to 0$$

L'espace $(X_*(\hat{T}'_1) \otimes \mathbb{C}) \oplus (1-\hat{\theta})(X_*(\hat{T}) \otimes \mathbb{C})$ est un supplémentaire du noyau de $\hat{p}$ et s'identifie donc à $X_*(\hat{\mathfrak{T}}) \otimes \mathbb{C}$. On peut considérer que b_ρ et b'_ρ appartiennent à ce supplémentaire et on pose simplement $b = b_\rho$. Montrons que

(1) b appartient à $(X_*(Z(\hat{G}'_1)^0) \otimes \mathbb{C}) \oplus (1-\hat{\theta})(X_*(Z(\hat{G})^0) \otimes \mathbb{C})$.

Preuve. Notons b_1 et b_2 les deux composantes de b. Soit α une racine de $\hat{T}'_1$ dans $\hat{G}'_1$. On veut montrer que $< \alpha, b_1 >= 0$. La racine α se restreint (via $\hat{\xi}_1$) en une racine de $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ dans $\hat{G}'$, qui est la restriction d'une racine β de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$. On définit $N\beta$ comme en 1.6 et on note $n(\beta)$ l'entier positif tel que la restriction de $N\beta$ à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ coïncide avec celle de $n(\beta)\alpha$. L'élément $(n(\beta)\alpha, N\beta)$ appartient à $X^*(\hat{\mathfrak{T}})$. Parce que $N\beta$ est invariant par $\hat{\theta}$, on a $< N\beta, b_2 >= 0$, d'où l'égalité $n(\beta) < \alpha, b_1 >=< (n(\beta)\alpha, N\beta), b >$. Pour prouver que ce terme est nul, il suffit de prouver que $(n(\beta)\alpha, N\beta) \circ \rho(w) = 1$ pour tout $w \in \mathbb{C}^\times$. Mais $\alpha(\zeta_1(w)) = 1$ parce que $\zeta_1(w)$ est central dans $\hat{G}'_1$ et $(N\beta)(g(w)) = 1$ parce que β se restreint en une racine de $\hat{G}'$ et que g_w agit par l'identité sur ce groupe. Cela prouve que b_1 est central. Notons ρ' l'homomorphisme de $\mathbb{C}^\times$ dans $(1-\hat{\theta})(\hat{T})$ défini par $\rho'(w) = (1-\hat{\theta})(g(w))$. On a $(1-\hat{\theta})(b_2) = b_{\rho'}$. On a la relation $s\hat{\theta}(g(w))w_G(s)^{-1} = a(w)g(w)$, où a est un cocycle de $W_\mathbb{R}$ dans $Z(\hat{G})$, de classe $\mathbf{a}$. Ici, on se restreint à $w \in \mathbb{C}^\times$ donc $w_G = 1$. De plus, s commute à $g(w) \in \hat{T}$. L'égalité précédente se simplifie en $\rho'(w) = a(w)^{-1}$. L'application a, restreinte à $\mathbb{C}^\times$, est un homomorphisme continu dont l'image est connexe, donc contenue dans $Z(\hat{G})^0$. On obtient $b_a = -b_{\rho'} = (\hat{\theta}-1)(b_2)$. D'où $b_a \in (1-\hat{\theta})(X_*(\hat{T})\otimes\mathbb{C}) \cap X*(Z(\hat{G})^0)\otimes\mathbb{C}$. La décomposition

$$X_*(\hat{T})\otimes\mathbb{C} = (X_*(Z(\hat{G})^0)\otimes\mathbb{C}) \oplus (X_*(\hat{T}_{sc})\otimes\mathbb{C})$$

est stable par $1-\hat{\theta}$ et cela entraîne que l'intersection précédente est égale à $(1-\hat{\theta})(X_*(Z(\hat{G})^0)\otimes\mathbb{C})$ ou encore à $(1-\hat{\theta})^2(X_*(Z(\hat{G})^0)\otimes\mathbb{C})$. L'égalité $b_a = (\hat{\theta}-1)(b_2)$ et l'injectivité de $(1-\hat{\theta})$ sur $(1-\hat{\theta})(X_*(\hat{T})\otimes\mathbb{C})$ entraînent alors que b_2 appartient à $(1-\hat{\theta})(X_*(Z(\hat{G})^0)\otimes\mathbb{C})$. $\square$

Soit $(\delta_1,\gamma)\in\mathcal{D}_1$. On note T'_1 et T' les commutants de δ_1 dans G'_1 et de δ dans G' et on note T le commutant de G_γ dans G. On a des projections

$$T'_1 \to T' \leftarrow T$$

définies sur $\mathbb{R}$, d'où des projections

$$\mathfrak{t}'_1 \to \mathfrak{t}' \leftarrow \mathfrak{t}$$

au niveau des algèbres de Lie. L'élément b s'identifie à un élément de $\mathfrak{t}'_1(\mathbb{C})^*\oplus\mathfrak{t}(\mathbb{C})^*$. Soient $Y_1\in\mathfrak{t}'_1(\mathbb{R})$ et $X\in\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ ayant même image Y dans $\mathfrak{t}'(\mathbb{R})$. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$ assez proche de 0, le couple $(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma)$ appartient à $\mathcal{D}_1$. On dispose donc du facteur de transfert $\Delta_1(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma)$.

Lemme. *La fonction*

$$\lambda\mapsto\Delta_1(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma)$$

est C^∞ au voisinage de 0. *On a l'égalité*

$$\frac{d}{d\lambda}\Delta_1(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma)_{|\lambda=0} =< b, Y_1\oplus X > \Delta_1(\delta_1,\gamma).$$

Preuve. Dans ces assertions, on peut remplacer $\Delta_1(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma)$ par

$$\boldsymbol{\Delta}_1(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma;\delta_1,\gamma).$$

Reprenons les constructions de 2.2 pour calculer ce bifacteur. On ajoute un λ dans les notations et on le supprime de nouveau pour noter les valeurs en $\lambda=0$. Par exemple, on note $\boldsymbol{\nu}_1(\lambda)$ le terme noté $\boldsymbol{\nu}_1$ en 2.2 et on pose $\boldsymbol{\nu}_1=\boldsymbol{\nu}_1(0)$. Dans la définition de $\boldsymbol{\Delta}_{imp}(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma;\delta_1,\gamma)$, le seul terme qui dépend vraiment de λ est $\boldsymbol{\nu}_1(\lambda)$. Ce terme est le produit de $\boldsymbol{\nu}_1$ et de l'image de $(exp(\lambda Y_1), exp(\lambda X))\in\mathfrak{T}_1(\mathbb{R})$ par l'homomorphisme naturel $\mathfrak{T}_1(\mathbb{R})\to S_1(\mathbb{R})$.Posons simplement $Z=Y_1\oplus X\in X_*(\mathfrak{T}_1)\otimes\mathbb{C}$. Une propriété de compatibilité déjà utilisée entraîne alors l'égalité

$$\boldsymbol{\Delta}_{imp}(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma;\delta_1,\gamma) =< \hat{V}_{\mathfrak{T}_1}, exp(\lambda Z) >^{-1}\boldsymbol{\Delta}_{imp}(\delta_1,\gamma;\delta_1,\gamma).$$

En fait, le dernier terme vaut 1. Le cocycle $\hat{V}_{\mathfrak{T}_1}$ définit un caractère disons $\omega_{\mathfrak{T}_1}$ de $\mathfrak{T}_1(\mathbb{R})$. Par une propriété générale, la restriction $\hat{V}_{\mathfrak{T}_1,\mathbb{C}}$ de $\hat{V}_{\mathfrak{T}_1}$ à $W_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^\times$ définit le caractère $\omega_{\mathfrak{T}_1}\circ Norm$ de $\mathfrak{T}_1(\mathbb{C})$, où $Norm:\mathfrak{T}_1(\mathbb{C})\to\mathfrak{T}_1(\mathbb{R})$ est la norme habituelle. On a $exp(\lambda Z) = Norm(exp(\lambda Z/2))$ d'où

$$< \hat{V}_{\mathfrak{T}_1}, exp(\lambda Z) >=< \hat{V}_{\mathfrak{T}_1,\mathbb{C}}, exp(\lambda Z/2)) > .$$

Ce dernier terme est calculé dans [Bor] 9.1. En notant simplement b_1 et b'_1 les éléments de $X_*(\hat{\mathfrak{T}}_1)\otimes\mathbb{C}=X^*(\mathfrak{T}_1)\otimes\mathbb{C}$ associés à $\hat{V}_{\mathfrak{T}_1,\mathbb{C}}$, on a

$$<\hat{V}_{\mathfrak{T}_1,\mathbb{C}}, exp(\lambda Z/2)>=exp(\lambda(<b_1,Z>+<b'_1,\bar{Z}>)/2),$$

où $Z\mapsto\bar{Z}$ est l'identité sur $X_*(\mathfrak{T}_1)$ et la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}$. Parce que $\hat{V}_{\mathfrak{T}_1,\mathbb{C}}$ est la restriction d'un cocycle défini sur $W_{\mathbb{R}}$, on a $<b'_1,\bar{Z}>=<b_1,\sigma(Z)>$ où σ est le produit des deux conjugaisons complexes sur $X_*(\mathfrak{T}_1)$ et $\mathbb{C}$. Mais Z est défini sur $\mathbb{R}$ donc $\sigma(Z)=Z$ et le terme ci-dessus vaut simplement $exp(\lambda<b_1,Z>)$. Calculons b_1. Pour $w\in W_{\mathbb{C}}$, les formules de 2.2 se simplifient : $\omega_T(w)=1$ et $\omega_{T,G'}(w)=1$. D'où

$$\hat{V}_{\mathfrak{T}_1}(w)=(\zeta_1(w),\hat{r}_T(w)g(w)^{-1}\hat{r}_{T,G'}(w)^{-1}).$$

Cet homomorphisme est le produit de ρ^{-1} et de l'image naturelle de l'homomorphisme ρ' de $\mathbb{C}^\times$ dans $\hat{T}$ défini par

$$\rho'(w)=\hat{r}_T(w)\hat{r}_{T,G'}(w)^{-1}.$$

On obtient ainsi

$$(2)\qquad \mathbf{\Delta}_{imp}(exp(\lambda Y_1)\delta_1,exp(\lambda X)\gamma;\delta_1,\gamma)=<\hat{V}_{\mathfrak{T}_1},exp(\lambda Z)>^{-1}$$

$$=exp(\lambda<b,Y_1\oplus X>)exp(-\lambda<b_{\rho'},X>).$$

On va calculer $b_{\rho'}$. Pour définir le bifacteur de transfert, on a dû fixer un sous-groupe de Borel B contenant T, qui détermine une positivité sur $\Sigma(T)_{res,ind}$. Notons σ la conjugaison complexe et notons C le caractère de $\mathbb{C}^\times$ défini par $C(w)=\frac{w}{|w|}$, où ici $|w|=(\bar{w}w)^{1/2}$. On peut choisir nos χ-data telles que, pour $\alpha_{res}\in\Sigma(T)_{res,ind}$,

$$\chi_{\alpha_{res}}=\begin{cases}1, & \text{si } \sigma\alpha_{res}\neq-\alpha_{res},\\ C, & \text{si } \sigma\alpha_{res}=-\alpha_{res} \text{ et } \alpha_{res}>0,\\ C^{-1}, & \text{si } \sigma\alpha_{res}=-\alpha_{res} \text{ et } \alpha_{res}<0.\end{cases}$$

Avec ces définitions, on voit que, pour $w\in W_{\mathbb{C}}$, on a

$$\hat{r}_T(w)=\prod_{\beta\in\Sigma(\hat{T})_{res,ind};\sigma\beta=-\beta,\beta>0}\check{\beta}\circ C(w),$$

$$\hat{r}_{T,G'}(w)=\prod_{\beta\in\Sigma(\hat{T}');\sigma\beta=-\beta,\beta>0}\check{\beta}'\circ C(w).$$

Attention : on a noté $\check{\beta}$ la coracine pour le groupe $\hat{G}^{\hat{\theta},0}$ associée à $\beta\in\Sigma(\hat{T})_{res,ind}$ et $\check{\beta}'$ celle pour le groupe $\hat{G}'$ associée à $\beta\in\Sigma(\hat{T}')$. On déduit de ces formules l'égalité

$$b_{\rho'}=\frac{1}{2}\left(\sum_{\beta\in\Sigma(\hat{T})_{res,ind};\sigma\beta=-\beta,\beta>0}\check{\beta}\right)-\frac{1}{2}\left(\sum_{\beta\in\Sigma(\hat{T}');\sigma\beta=-\beta,\beta>0}\check{\beta}'\right).$$

On doit identifier toutes ces coracines à des caractères de T. Pour cela, on utilise 1.6. Soit α_{res} un élément de $\Sigma(T)_{res,ind}$, qui est la restriction d'un élément $\alpha\in\Sigma$ de type 1 ou 2 (puisque α_{res} est indivisible). Il lui est toujours associé un élément $\beta=(\hat{\alpha})_{res}\in\Sigma(\hat{T})_{res,ind}$ et $\check{\beta}$ s'identifie à $N\alpha$ si α est de type 1, à $2N\alpha$ si α est de type 2. Il est associé à α_{res} un élément $\beta\in\Sigma(\hat{T}')$ si α est de type 1 et $N\hat{\alpha}(s)=1$ ou si α est de type 2 et

$N\hat{\alpha}(s) = \pm 1$ (si $N\hat{\alpha}(s) = -1$, β est plus exactement associé à $2\alpha_{res}$ qui est la restriction d'une racine de type 3). Alors $\check{\beta}$ s'identifie à

$$\begin{cases} N\alpha, & \text{si } \alpha \text{ est de type 1 et } N\hat{\alpha}(s) = 1; \\ 2N\alpha, & \text{si } \alpha \text{ est de type 2 et } N\hat{\alpha}(s) = 1; \\ N\alpha, & \text{si } \alpha \text{ est de type 2 et } N\hat{\alpha}(s) = -1. \end{cases}$$

Reprenons la classification en types (a), (b), (c) et (d) de la fin du paragraphe 2.2. Les formules ci-dessus conduisent à l'égalité

$$(3) \qquad b_{\rho'} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha_{res}\in\Sigma_\star \text{ de type (a) ou (c)}} N\alpha\right) + \left(\sum_{\alpha_{res}\in\Sigma_\star \text{ de type (b)}} N\alpha\right),$$

où on a noté $\Sigma_\star$ l'ensemble des $\alpha_{res} \in \Sigma(T)_{res,ind}$ tels que $\sigma\alpha_{res} = -\alpha_{res}$ et $\alpha_{res} > 0$.

D'après les définitions et notre choix de χ-data, on a

$$\Delta_{II}(exp(\lambda Y)\delta, exp(\lambda X)\gamma)\Delta_{II}(\delta,\gamma)^{-1} = \prod_{\alpha_{res}\in\Sigma_\star} C(z_{\alpha_{res}}(\lambda)),$$

où

$$z_{\alpha_{res}}(\lambda) = \begin{cases} \frac{(N\alpha)(\nu(\lambda))-1}{(N\alpha)(\nu)-1}, & \text{dans le cas (a)}, \\ \frac{(N\alpha)(\nu(\lambda))^2-1}{(N\alpha)(\nu)^2-1}, & \text{dans le cas (b)}, \\ \frac{(N\alpha)(\nu(\lambda))+1}{(N\alpha)(\nu)+1}, & \text{dans le cas (c)}, \\ 1, & \text{dans le cas (d)}. \end{cases}$$

Parce que γ appartient à $\tilde{G}(\mathbb{R})$, il résulte de 1.3(4) que l'image de ν dans $T/(1-\theta)(T)Z(G)$ est fixe par σ. Pour $\alpha \in \Sigma_\star$, on a $\sigma(N\alpha) = -N\alpha$. Ces deux propriétés entraînent que $(N\alpha)(\nu)$ est un nombre complexe de module 1. De même pour $(N\alpha)(\nu(\lambda))$. Remarquons que $(N\alpha)(\nu(\lambda)) = exp(\lambda < N\alpha, X >)(N\alpha)(\nu)$. Un calcul montre alors que pour λ proche de 0, on a

$$z_{\alpha_{res}}(\lambda) \in \begin{cases} exp(\lambda < N\alpha, X > /2)\mathbb{R}_{>0}, & \text{dans les cas (a) et (c)}, \\ exp(\lambda < N\alpha, X >)\mathbb{R}_{>0}, & \text{dans le cas (b)}, \\ \mathbb{R}_{>0}, & \text{dans le cas (d)}. \end{cases}$$

En comparant avec (3), on en déduit

$$\Delta_{II}(exp(\lambda Y)\delta, exp(\lambda X)\gamma)\Delta_{II}(\delta,\gamma)^{-1} = exp(\lambda < b_{\rho'}, X >),$$

puis, grâce à (2)

$$\boldsymbol{\Delta}_1(exp(\lambda Y_1)\delta_1, exp(\lambda X)\gamma; \delta_1, \gamma) = exp(\lambda < b, X_1 \oplus X >).$$

Le lemme résulte de cette formule. $\square$

Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On introduit la fonction $F_{f,\gamma}$ définie au voisinage de γ dans $T(\mathbb{R})\gamma$ par $F_{f,\gamma}(exp(X)\gamma) = [T^\theta(\mathbb{R}) : T^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1} I^{\tilde{G}}(exp(X)\gamma, \omega, f)$ et la fonction $F'_{f,\gamma}$ définie au voisinage de δ_1 dans $T'_1(\mathbb{R})\delta_1$ par

$$F'_{f,\gamma}(exp(Y_1)\delta_1) = \Delta_1(exp(Y_1)\delta_1, exp(X)\gamma)[T^\theta(\mathbb{R}) : T^{\theta,0}(\mathbb{R})]^{-1} I^{\tilde{G}}(exp(X)\gamma, \omega, f),$$

où X est n'importe quel élément de $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$, assez petit, dont l'image dans $\mathfrak{t}'(\mathbb{R})$ coïncide avec celle de Y_1 (l'expression ne dépend pas de X : pour X assez proche de 0, la classe de conjugaison de $exp(X)\gamma$ est déterminée par l'image de X dans $\mathfrak{t}'(\mathbb{R})$). La preuve du lemme montre que ces deux fonctions sont C^∞ (rappelons que γ est fortement régulier). Le tore $T(\mathbb{R})$ agit à gauche sur l'espace des fonctions sur $T(\mathbb{R})\gamma$. Il s'en déduit une action par opérateurs différentiels de l'algèbre $Sym(\mathfrak{t}(\mathbb{C}))$ sur l'espace des fonctions C^∞ définies au voisinage de γ dans $T(\mathbb{R})\gamma$. De même, on a une action de $Sym(\mathfrak{t}'_1(\mathbb{C}))$ sur l'espace des fonctions C^∞ définies au voisinage de δ_1 dans $T'_1(\mathbb{R})\delta_1$.

Remarque. Une abondante littérature concernant les groupes réels privilégie les actions à droite. On préfère les actions à gauche. On espère que cela ne créera pas trop de perturbations.

On a des homomorphismes

$$Sym(\mathfrak{t}'_1(\mathbb{C})) \to Sym(\mathfrak{t}'(\mathbb{C})) \leftarrow Sym(\mathfrak{t}(\mathbb{C})).$$

On définit un automorphisme $\mathbf{b}$ de $Sym(\mathfrak{t}(\mathbb{C}))$: c'est l'unique automorphisme tel que, pour $X \in \mathfrak{t}(\mathbb{C})$, on ait $\mathbf{b}(X) = X + < b, X >$. On définit un automorphisme $\mathbf{b}'_1$ de $Sym(\mathfrak{t}'_1(\mathbb{C}))$: c'est l'unique automorphisme tel que, pour $Y_1 \in \mathfrak{t}'_1(\mathbb{C})$, on ait $\mathbf{b}'_1(Y_1) = Y_1 + < b, Y_1 >$. Montrons que

(4) soient $U \in Sym(\mathfrak{t}(\mathbb{C}))$ et $U'_1 \in Sym(\mathfrak{t}'_1(\mathbb{C}))$; supposons que $(\mathbf{b}'_1)^{-1}(U'_1)$ et $\mathbf{b}(U)$ aient même image dans $Sym(\mathfrak{t}'(\mathbb{C}))$; alors

$$U'_1 F'_{f,\gamma}(\delta_1) = \Delta_1(\delta_1, \gamma) U F_{f,\gamma}(\gamma).$$

Preuve. Considérons d'abord le cas où $U'_1 = Y_1 + < b, Y_1 >$ et $U = X - < b, X >$, avec $Y_1 \in \mathfrak{t}'_1(\mathbb{R})$ et $X \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})$ ayant même image dans $\mathfrak{t}'(\mathbb{R})$. Dans ce cas, la relation cherchée résulte d'un simple calcul et du lemme précédent. En fait, on obtient une relation plus générale : la fonction $U'_1 F'_{f,\gamma}$ se déduit de $U F_{f,\gamma}$ comme $F'_{f,\gamma}$ se déduit de $F_{f,\gamma}$. Par récurrence, on obtient la même relation dans le cas où $U'_1 = U_1^{'(1)} ... U_1^{'(n)}$ et $U = U^{(1)} ... U^{(n)}$, si chaque couple $(U_1^{'(i)}, U^{(i)})$ vérifie les conditions ci-dessus. En général, on peut écrire (U'_1, U) comme combinaison linéaire de tels couples $(U_1^{'(1)} ... U_1^{'(n)}, U^{(1)} ... U^{(n)})$ et d'un couple $(U'_1, 0)$. Il nous reste à traiter ce cas. Supposons donc $U = 0$. Alors U'_1 appartient à l'idéal engendré par les $\mathbf{b}_1(Y_1)$ où Y_1 appartient au noyau de la projection $\mathfrak{t}'_1(\mathbb{R}) \to \mathfrak{t}'(\mathbb{R})$. Il suffit de prouver que pour un tel U'_1, on a $U'_1 F'_{f,\gamma} = 0$. Or cela résulte du premier cas traité : il suffit de compléter Y_1 en le couple $(Y_1, X = 0)$. $\square$

Notons $\mathfrak{Z}(G)$ le centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G. D'après Harish-Chandra, on a l'isomorphisme $\mathfrak{Z}(G) \simeq Sym(\mathfrak{t}(\mathbb{C}))^W$. On en déduit des homomorphismes

$$(5) \qquad \mathfrak{Z}(G'_1) \simeq Sym(\mathfrak{t}'_1(\mathbb{C}))^{W'} \to \mathfrak{Z}(G') \simeq Sym(\mathfrak{t}'(\mathbb{C}))^{W'} \leftarrow \mathfrak{Z}(G) \simeq Sym(\mathfrak{t}(\mathbb{C}))^W.$$

Les automorphismes $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}'_1$ définis plus haut se restreignent en des automorphismes de $\mathfrak{Z}(G)$ et $\mathfrak{Z}(G'_1)$: cela résulte de (1). L'algèbre $\mathfrak{Z}(G)$ agit à gauche et à droite sur $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. L'algèbre $\mathfrak{Z}(G'_1)$ agit à gauche et à droite sur $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$. On considère les actions à gauche.

Corollaire. *Soient $U'_1 \in \mathfrak{Z}(G'_1)$, $U \in \mathfrak{Z}(G)$, $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $f_1 \in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$. Supposons que f_1 soit un transfert de f et que $(\mathbf{b}'_1)^{-1}(U'_1)$ et $\mathbf{b}(U)$ aient même image dans $\mathfrak{Z}(G')$ par les homomorphismes (4). Alors $U'_1 f_1$ est un transfert de Uf.*

Preuve. Soit $\delta_1 \in \tilde{G}'_1(\mathbb{R})$ un élément fortement $\tilde{G}$-régulier. On a

$$I^{\tilde{G}}(\delta_1, f) = d(\theta^*)^{1/2} \sum_{\gamma} \Delta_1(\delta_1, \gamma)[Z_G(\gamma, \mathbb{R}) : G_\gamma(\mathbb{R})]^{-1} I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f),$$

cf. 2.5. Pour chaque γ dans l'ensemble de sommation, introduisons les fonctions $F_{f,\gamma}$ et $F'_{f,\gamma}$ comme plus haut. La formule ci-dessus se récrit

$$I^{\tilde{G}}(\delta_1, f) = d(\theta^*)^{1/2} \sum_{\gamma} F'_{f,\gamma}(\delta_1).$$

Pour tout γ, on a l'égalité

$$F_{Uf,\gamma} = UF_{f,\gamma}.$$

Ceci est un théorème d'Harish-Chandra dans le cas non tordu et on vérifie que la preuve s'étend dans notre cas. Cette relation jointe à (4) entraîne

$$F'_{Uf,\gamma} = U'_1 F'_{f,\gamma}.$$

On en déduit

$$(6) \qquad I^{\tilde{G}}(\delta_1, Uf) = U'_1 I^{\tilde{G}}(\delta_1, f),$$

où, à droite, on considère $I^{\tilde{G}}(\delta_1, f)$ comme une fonction définie au voisinage de δ_1 dans $T'_1(\mathbb{R})\delta_1$, T'_1 étant comme précédemment le commutant de δ_1.

Une même relation vaut pour l'intégrale orbitale stable $S^{\tilde{G}'}(\delta_1, f_1)$. C'est en fait essentiellement le cas particulier où $\tilde{G} = \tilde{G}'$. On obtient

$$(7) \qquad S^{\tilde{G}'}(\delta_1, U'_1 f_1) = U'_1 S^{\tilde{G}'}(\delta_1, f_1).$$

Puisque f_1 est un transfert de f, les deux membres de droite de (6) et (7) sont égaux. Donc aussi les deux membres de gauche. Cette dernière égalité signifie que $U'_1 f_1$ est un transfert de Uf $\square$

3 Levi et image du transfert

3.1 Espaces paraboliques, espaces de Levi

Appelons paire parabolique un couple (P, M) formé d'un sous-groupe parabolique P de G et d'une composante de Levi M de P. Provisoirement, on ne suppose pas que P ou M sont définis sur F. On note $\tilde{P}$ le normalisateur de P dans $\tilde{G}$ ($\tilde{P} = \{\gamma \in \tilde{G}; ad_\gamma(P) = P\}$) et $\tilde{M}$ le normalisateur commun de P et M. Si $\tilde{P}$ n'est pas vide, $\tilde{M}$ ne l'est pas non plus (si P et M sont définis sur F, on a mieux : $\tilde{P}(F)$ et $\tilde{M}(F)$ sont tous deux non vides). On dit alors que $\tilde{P}$ est un espace parabolique de $\tilde{G}$, que $\tilde{M}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$ et que $(\tilde{P}, \tilde{M})$ est une paire parabolique de $\tilde{G}$. Remarquons que $\tilde{P}$ est uniquement déterminé par P, mais $\tilde{M}$ n'est pas uniquement déterminé par M. Toutefois, dans le cas particulier où $\tilde{G}$ est à torsion intérieure, $\tilde{P}$ est toujours non vide et $\tilde{M}$ est uniquement déterminé par M : c'est l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}$ tels que $ad_\gamma \in M/Z(G)$.

Exemples. Supposons $G = GL(3)$. Posons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons θ^* l'automorphisme $g \mapsto J{}^tg^{-1}J$ de G et posons $\tilde{G} = G\theta^*$.

(1) Soit P le sous-groupe parabolique triangulaire supérieur à deux blocs de longueurs 2 et 1. Alors $\tilde{P}$ est vide.

(2) Soit P le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur et M le sous-groupe diagonal. Alors $\tilde{P} = P\theta^*$, $\tilde{M} = M\theta^*$. Soit s un élément du groupe de Weyl. Posons $P' = sPs^{-1}$ et $M' = sMs^{-1} = M$. Alors $\tilde{P}' = s\tilde{P}s^{-1} = sP\theta^*(s)^{-1}\theta^*$ et $\tilde{M}' = s\tilde{M}s^{-1} = sM\theta^*(s)^{-1}\theta^*$. Si $\theta^*(s) \neq s$, on a $\tilde{M}' \neq \tilde{M}$.

(3) Considérons le groupe

$$M = \{\begin{pmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & \star \end{pmatrix}\}.$$

C'est un Levi de G qui est stable par θ^*. Mais il n'y a aucun sous-groupe parabolique P de G, de composante de Levi M, pour lequel $\tilde{P}$ soit non vide.

Fixons une paire parabolique (P_0, M_0) de G définie sur F et minimale. On définit comme ci-dessus les normalisateurs $\tilde{P}_0$ et $\tilde{M}_0$. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G telle que $T \subset M_0$ et $B \subset P_0$. Fixons $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ (un tel élément n'a pas de raison d'appartenir à $\tilde{G}(F)$). On a $\tilde{M}_0 = M_0e$, $\tilde{P}_0 = P_0e$, et $\tilde{M}_0(F) \neq \emptyset$. On introduit l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ qui préserve la paire $\mathcal{E}$, pour laquelle G devient quasi-déployé, cf. 1.2. Fixons une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$. On modifie l'isomorphisme ${}^LG \simeq \hat{G} \rtimes W_F$ de sorte qu'elle devienne stable par l'action galoisienne et on fixe un élément $\hat{\theta}$ relatif à cette paire, cf. 1.4.

Rappelons qu'il y a des bijections naturelles entre les divers ensembles suivants :

- les classes de conjugaison de paires paraboliques de G ;

- les paires paraboliques de G qui sont standard, c'est-à-dire qu'elles contiennent (B, T) ;

- les classes de conjugaison de paires paraboliques de $\hat{G}$;

- les paires paraboliques de $\hat{G}$ qui sont standard, c'est-à-dire qu'elles contiennent $(\hat{B}, \hat{T})$.

Ces ensembles sont munis d'actions galoisiennes (sur le deuxième, c'est celle provenant de l'action quasi-déployée $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$). Les bijections sont équivariantes pour les actions galoisiennes. Celle entre paires standard transporte l'action de θ sur celle de $\hat{\theta}^{-1}$. Ainsi, la paire (P_0, M_0) correspond à une paire standard $(\hat{P}_0, \hat{M}_0)$ qui est fixée par les actions de Γ_F et $\hat{\theta}$. Alors les bijections précédentes induisent des bijections entre

- les classes de conjugaison de paires paraboliques de $\tilde{G}$ définies sur F ;

- les paires paraboliques standard de G fixées par Γ_F et θ et qui contiennent (P_0, M_0) ;

- les paires paraboliques standard de $\hat{G}$ fixées par Γ_F et $\hat{\theta}$ et qui contiennent $(\hat{P}_0, \hat{M}_0)$.

Appelons sous-groupe parabolique de ${}^LG$ un sous-groupe $\mathcal{P} \subset {}^LG$ pour lequel la projection sur W_F induit une suite exacte

$$1 \to \hat{P} \to \mathcal{P} \to W_F \to 1,$$

où $\hat{P}$ est un sous-groupe parabolique de $\hat{G}$. Appelons composante de Levi d'un tel sous-groupe un sous-groupe $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ pour lequel la projection sur W_F induit une suite exacte

$$1 \to \hat{M} \to \mathcal{M} \to W_F \to 1,$$

où $\hat{M}$ est une composante de Levi de $\hat{P}$. Remarquons que $\mathcal{P}$ est déterminé par $\hat{P}$: c'est le normalisateur de $\hat{P}$ dans ${}^L G$. De même, $\mathcal{M}$ est déterminé par $\hat{P}$ et $\hat{M}$. Pour de tels $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}$, notons $\tilde{\mathcal{P}}$ le normalisateur de $\mathcal{P}$ dans ${}^L\tilde{G} = {}^L G\hat{\theta}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ le normalisateur commun de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}$. Si $\tilde{\mathcal{P}}$ n'est pas vide, $\tilde{\mathcal{M}}$ ne l'est pas non plus et on appelle $\tilde{\mathcal{P}}$ un espace parabolique de ${}^L\tilde{G}$, $\tilde{\mathcal{M}}$ un espace de Levi de ${}^L\tilde{G}$ et $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{M}})$ une paire parabolique de ${}^L\tilde{G}$. Le groupe $\hat{G}$ agit par conjugaison sur l'ensemble de ces paires paraboliques. Montrons que

(4) l'ensemble des classes de conjugaison de paires paraboliques de ${}^L\tilde{G}$ est en bijection avec l'ensemble des paires paraboliques standard de $\hat{G}$ qui sont invariantes par Γ_F et $\hat{\theta}$.

Preuve. Soit $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{M}})$ une paire parabolique de ${}^L\tilde{G}$. Le groupe $\mathcal{P}$ est bien déterminé : c'est le sous-groupe des $x \in {}^L G$ tels que $x\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}$. De même, le groupe $\mathcal{M}$ est bien déterminé. Les groupes $\hat{P}$ et $\hat{M}$ sont bien déterminés : ce sont les intersections de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}$ avec $\hat{G}$. Il existe une unique paire parabolique standard $(\hat{P}', \hat{M}')$ de $\hat{G}$ qui est conjuguée à $(\hat{P}, \hat{M})$. Quitte à effectuer une conjugaison, on se ramène au cas où $(\hat{P}, \hat{M})$ est elle-même standard. Soit $(g, w) \in \mathcal{P}$. Puisque $\mathcal{P}$ est un groupe, la conjugaison par (g, w) conserve $\hat{P}$, autrement dit $gw(\hat{P})g^{-1} = \hat{P}$. Puisque $(\hat{B}, \hat{T})$ est conservé par Γ_F, $w(\hat{P})$ est encore standard. Deux sous-groupes paraboliques standard ne sont conjugués que s'ils sont égaux. Donc $w(\hat{P}) = \hat{P}$. L'égalité $gw(\hat{P})g^{-1} = \hat{P}$ entraîne alors que $g \in \hat{P}$. Cela démontre que $\hat{P}$ est conservé par Γ_F et que $\mathcal{P} = \hat{P} \rtimes W_F$. Fixons un élément de l'ensemble $\tilde{\mathcal{P}}$, qui n'est pas vide. Quitte à le multiplier par un élément de $\mathcal{P}$, on peut le supposer de la forme $g\hat{\theta}$, avec $g \in \hat{G}$. Cet élément normalise $\mathcal{P}$, donc aussi son intersection $\hat{P}$ avec $\hat{G}$. De nouveau, parce que $\hat{\theta}(\hat{P})$ est standard, cela entraîne que $\hat{\theta}(\hat{P}) = \hat{P}$, puis que $g \in \hat{P}$. Donc $\tilde{\mathcal{P}} = (\hat{P} \rtimes W_F)\hat{\theta}$. Un raisonnement analogue vaut pour les composantes de Levi : $\hat{M}$ est nécessairement stable par Γ_F et $\hat{\theta}$ et on a $\tilde{\mathcal{M}} = (\hat{M} \rtimes W_F)\hat{\theta}$. L'assertion (4) s'ensuit. $\square$

Ainsi, les bijections précédentes se prolongent en une injection de l'ensemble des classes de conjugaison de paires paraboliques de $\tilde{G}$ définies sur F dans celui des classes de conjugaison de paires paraboliques de ${}^L\tilde{G}$. C'est une bijection si et seulement si G est quasi-déployé. Remarquons que, si la classe de $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{M}})$ correspond à celle de (P, M) par cette application, le groupe $\mathcal{M}$ s'identifie à ${}^L M$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ à ${}^L\tilde{M}$. Mais une telle identification n'est pas intrinsèque aux deux ensembles $\tilde{M}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$, elle dépend des paraboliques.

On aura aussi besoin de considérer des Levi ou sous-groupes paraboliques semi-standard. Pour un sous-groupe parabolique P de G semi-standard, c'est-à-dire contenant T, notons $\Sigma^P(T)$ l'ensemble des racines de T dans l'algèbre de Lie de P. De même, pour un Levi semi-standard M de G, on définit l'ensemble $\Sigma^M(T)$. Pour un sous-groupe parabolique semi-standard $\hat{P}$ de $\hat{G}$, ou pour un Levi semi-standard $\hat{M}$, on définit de même les ensembles de racines $\Sigma^{\hat{P}}(\hat{T})$ et $\Sigma^{\hat{M}}(\hat{T})$. Montrons que

(5) il y a une bijection $P \mapsto \hat{P}$ entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques semi-standard de G et celui des sous-groupes paraboliques semi-standard de $\hat{G}$ caractérisée par l'égalité $\Sigma^{\hat{P}}(\hat{T}) = \{\hat{\alpha}; \alpha \in \Sigma^P(T)\}$;

(6) il y a une bijection $M \mapsto \hat{M}$ entre l'ensemble des Levi semi-standard de G et celui des Levi semi-standard de $\hat{G}$ caractérisée par l'égalité $\Sigma^{\hat{M}}(\hat{T}) = \{\hat{\alpha}; \alpha \in \Sigma^M(T)\}$.

Preuve. L'application $P \mapsto \Sigma^P(T)$ est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques semi-standard de G et l'ensemble des sous-ensembles $\Pi \subset \Sigma(T)$ vérifiant les deux propriétés :

(7) $\Pi \cup (-\Pi) = \Sigma$;

(8) si $\alpha, \beta \in \Pi$ sont tels que $\alpha + \beta \in \Sigma(T)$, alors $\alpha + \beta \in \Pi$.

On a une assertion analogue du côté dual. D'autre part, on peut identifier $\Sigma(\hat{T})$ à l'ensemble de coracines $\check{\Sigma}(T)$. Pour prouver (5), il suffit de prouver que l'application $\Pi \mapsto \check{\Pi} = \{\check{\alpha}; \alpha \in \Pi\}$ échange les conditions (7) et (8) avec les analogues pour l'ensemble $\check{\Sigma}(T)$. Evidemment, si Π vérifie (7), $\check{\Pi}$ vérifie la condition analogue. Soient $\check{\alpha}$, $\check{\beta} \in \check{\Pi}$, supposons $\check{\alpha} + \check{\beta} \in \check{\Sigma}(T)$. Alors α et β forment une base d'un système de racines irréductible de rang 2. D'après (8), les éléments positifs de ce système appartiennent à Π. En inspectant les trois systèmes de racines possibles de rang 2, on vérifie que $\check{\alpha} + \check{\beta}$ est toujours la coracine d'un élément positif de ce système. Donc $\check{\alpha} + \check{\beta}$ appartient à $\check{\Pi}$. Cela prouve (5). Les ensembles $\Sigma^M(T)$ pour M semi-standard sont exactement ceux de la forme $\Pi \cap (-\Pi)$, pour Π vérifiant (7) et (8). Alors la même preuve s'applique à (6). $\square$

Changement de terminologie. Dorénavant, on appellera "sous-groupe parabolique" de G ou "espace parabolique" de $\tilde{G}$ de tels objets définis sur F. On appellera "Levi" de G une composante de Levi définie sur F d'un sous-groupe parabolique défini sur F et on appellera "espace de Levi" de $\tilde{G}$ une composante de Levi définie sur F d'un espace parabolique de $\tilde{G}$ défini sur F.

On utilisera les notations d'Arthur concernant ces objets. Par exemple, pour un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, on note $\mathcal{L}(\tilde{M})$ l'ensemble des espaces de Levi $\tilde{L}$ contenant $\tilde{M}$. On utilise des notations analogues pour les groupes et espaces duaux. Notons $(\mathcal{P}_0, \mathcal{M}_0)$ la paire parabolique de ${}^L\tilde{G}$ issue de $(\hat{P}_0, \hat{M}_0)$, c'est-à-dire $\mathcal{P}_0 = (\hat{P}_0 \rtimes W_F)\hat{\theta}$, $\mathcal{M}_0 = (\hat{M}_0 \rtimes W_F)\hat{\theta}$. Alors

(9) il y a une bijection $\tilde{M} \mapsto \mathcal{M}$ de $\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$ caractérisée ainsi : si M est le Levi sous-jacent à $\tilde{M}$ et $\hat{M}$ le Levi sous-jacent à $\mathcal{M}$, M s'envoie sur $\hat{M}$ par la bijection (6).

C'est évident puisque la bijection (6) est équivariante pour les actions galoisiennes et échange les actions de θ et de $\hat{\theta}^{-1}$.

Soient $\tilde{M}$ et $\underline{\tilde{M}}$ deux espaces de Levi de $\tilde{G}$ et soient $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}$ deux Levi de ${}^L\tilde{G}$. On suppose que $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}$ s'identifient à ${}^L\tilde{M}$ et ${}^L\underline{\tilde{M}}$ grâce à des choix de paraboliques comme plus haut et on fixe de telles identifications. Notons

$$W(\tilde{M}, \underline{\tilde{M}}) = \{g \in G(F); ad_g(\tilde{M}) = \underline{\tilde{M}}\}/M(F),$$

$$W(\tilde{\mathcal{M}}, \underline{\tilde{\mathcal{M}}}) = \{x \in \hat{G}; ad_x(\tilde{\mathcal{M}}) = \underline{\tilde{\mathcal{M}}}\}/\hat{M}.$$

Alors

(10) il y a une bijection naturelle entre $W(\tilde{M}, \underline{\tilde{M}})$ et $W(\tilde{\mathcal{M}}, \underline{\tilde{\mathcal{M}}})$.

Preuve. En oubliant les choix faits précédemment, on fixe maintenant des paires de Borel épinglées dans chacun des groupes intervenant, dont on note les tores T, $\underline{T}$, $\hat{T}$, $\hat{\underline{T}}$. On normalise les actions de Γ_F sur $\hat{M}$ et $\hat{\underline{M}}$ de sorte qu'elles préservent les paires de Borel épinglées. On choisit $\hat{\theta} \in \tilde{\mathcal{M}} \cap \hat{G}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\underline{\theta}} \in \underline{\tilde{\mathcal{M}}} \cap \hat{G}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ qui préservent aussi ces paires. De même, on choisit $e \in \tilde{M}$ et $\underline{e} \in \underline{\tilde{M}}$ préservant les paires de Borel épinglées et on introduit les actions galoisiennes quasi-déployées $\sigma \mapsto \sigma_{M^*}$ et $\sigma \mapsto \sigma_{\underline{M}^*}$ qui prolongent aux groupes M et $\underline{M}$ celles de 1.2. Puisque l'on a fixé des identifications de $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}$ à ${}^L\tilde{M}$ et ${}^L\underline{\tilde{M}}$, les tores $\hat{T}$ et $\hat{\underline{T}}$ s'identifient aux duaux de T et $\underline{T}$. Ces identifications sont équivariantes pour les actions galoisiennes et transportent $\hat{\theta}$ et $\hat{\underline{\theta}}$ en les inverses de $\theta = ad_e$ et $\underline{\theta} = ad_{\underline{e}}$. Soit $x \in \hat{G}$ tel que $ad_x(\tilde{\mathcal{M}}) = \underline{\tilde{\mathcal{M}}}$. Quitte à multiplier x à droite par un élément de $\hat{M}$, on peut supposer que ad_x transporte la paire de $\hat{M}$ sur celle de $\underline{\hat{M}}$, donc $\hat{T}$ sur $\underline{\hat{T}}$. Par dualité puis inversion, il s'en déduit un isomorphisme $\iota : T \to \underline{T}$. Celui-ci est la restriction d'un automorphisme ad_g pour un $g \in G$. En effet nos identifications sont issues de choix de paraboliques. A conjugaison près, on peut les supposer tous standard, pour des paires de Borel fixées de G et $\hat{G}$. Alors $\underline{\hat{T}}$ devient égal à $\hat{T}$, l'isomorphisme ad_x de ce tore est un élément du groupe de Weyl de $\hat{G}$ et ι est l'élément du groupe de Weyl de G qui lui correspond. Soit donc $g \in G$ tel que ι soit la restriction de ad_g à T. La définition de x entraîne que ad_x envoie $\hat{M}$ sur $\underline{\hat{M}}$, qu'il est équivariant pour les actions galoisiennes et transporte $\hat{\theta}$ sur $\underline{\hat{\theta}}$ (ces éléments étant vus ici comme des automorphismes de $\hat{G}$). Par dualité, ad_g envoie M sur $\underline{M}$, est équivariant pour les actions galoisiennes quasi-déployées et transporte θ sur $\underline{\theta}$. Cette dernière condition implique que $ad_g(\tilde{M}) = \underline{\tilde{M}}$. Parce que les actions galoisiennes naturelles ne diffèrent des actions quasi-déployées que par des automorphismes intérieurs, la condition d'équivariance entraîne que la classe gM est fixe par Γ_F dans G/M. Or $(G/M)(F) = G(F)/M(F)$. Quitte à multiplier g à droite par un élément de M, on peut supposer que $g \in G(F)$. Alors $gM(F) \in W(\tilde{M}, \underline{\tilde{M}})$. Evidemment, cette classe ne dépend que de la classe $x\hat{M}$ et on a ainsi défini une application de $W(\tilde{\mathcal{M}}, \underline{\tilde{\mathcal{M}}})$ dans $W(\tilde{M}, \underline{\tilde{M}})$. On vérifie qu'elle ne dépend pas des choix de paires de Borel épinglées. On définit l'application réciproque de façon analogue. Cela prouve (10). $\square$

Les propriétés suivantes sont utiles :

(11) soit $T \subset G$ un tore défini et déployé sur F ; notons $Z_{\tilde{G}}(T)$ l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}$ tels que $ad_\gamma(t) = t$ pour tout $t \in T$; si cet ensemble n'est pas vide, c'est un espace de Levi de $\tilde{G}$;

(12) soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$; alors $\tilde{M} = Z_{\tilde{G}}(A_{\tilde{M}})$.

Preuve. Cela est bien connu dans le cas non tordu où $\tilde{G} = G$. Dans la situation de (11), le commutant M de T dans G est un Levi. Soit $x_* \in X_*(T)$ en position générale. Il détermine un sous-groupe parabolique P de composante de Levi M : P est engendré par M et les sous-espaces radiciels pour l'action de T dans l'algèbre de Lie de G associés aux racines α telles que $< \alpha, x_* >> 0$. Le normalisateur commun $\tilde{M}$ de P et M dans $\tilde{G}$ est un espace de Levi, s'il est non vide. Mais $Z_{\tilde{G}}(T)$ est inclus dans $\tilde{M}$ et est non vide par hypothèse. Donc $\tilde{M}$ est un espace de Levi. C'est un espace principal homogène pour l'action disons à gauche de M. Or $Z_{\tilde{G}}(T)$ est stable par cette action. L'inclusion $Z_{\tilde{G}}(T) \subset \tilde{M}$ est donc une égalité. Dans la situation de (12), on a l'inclusion $\tilde{M} \subset Z_{\tilde{G}}(A_{\tilde{M}})$ et ce deuxième ensemble est un espace de Levi comme on vient de le prouver. Il suffit de prouver que les Levi associés dans G sont égaux, autrement dit que $M = Z_G(A_{\tilde{M}})$. Soit $\tilde{P}$ un sous-espace parabolique de $\tilde{G}$ de sous-espace de Levi $\tilde{M}$. Soit $y_* \in X_*(A_M)$ déterminant P par la construction ci-dessus. Notons x_* la somme des éléments de l'orbite de y_* pour l'action du groupe d'automorphismes de $X_*(A_M)$ engendré par θ, où $\theta = ad_\gamma$ pour un élément quelconque $\gamma \in \tilde{M}$. Alors $x_* \in X_*(A_{\tilde{M}})$. Comme θ préserve les racines de A_M positives pour P, on voit que le couple (P, M) coïncide avec celui construit dans la preuve de (11). Donc $Z_G(A_{\tilde{M}}) \subset M$ et la conclusion. $\square$

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Considérons un espace parabolique $\tilde{P}$ de composante de Levi $\tilde{M}$ et une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de G telle que $B \subset P$ et $T \subset M$. Alors $\mathcal{E}^M = (B \cap M, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta^M})$ est une paire de Borel épinglée de M. On a une injection $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}) \subset Z(\tilde{M}, \mathcal{E}^M)$. On déduit par passage aux quotients une application $\mathcal{Z}(\tilde{G}, \mathcal{E}) \to \mathcal{Z}(\tilde{M}, \mathcal{E})$ qui s'identifie à une application $\mathcal{Z}(\tilde{G}) \to \mathcal{Z}(\tilde{M})$. On laisse le lecteur vérifier que

(14) cette application $\mathcal{Z}(\tilde{G}) \to \mathcal{Z}(\tilde{M})$ ne dépend pas des choix de $\tilde{P}$ et de $\mathcal{E}$.

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Fixons un espace parabolique $\tilde{P}$ de composante $\tilde{M}$

et un sous-groupe compact maximal K de $G(F)$, en bonne position relativement à M et spécial si F est non-archimédien. On note U le radical unipotent de P. Fixons des mesures de Haar sur $G(F)$ et $M(F)$. On en déduit une mesure sur $U(F)\times K$ de sorte que l'égalité suivante soit vérifiée

$$\int_{G(F)} f(g)\,dg = \int_{M(F)\times U(F)\times K} f(muk)\,dk\,du\,dm$$

pour toute $f\in C_c^\infty(G(F))$. On définit un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}(F)) & \to & C_c^\infty(\tilde{M}(F)) \\ f & \mapsto & f_{\tilde{M},\omega} \end{array}$$

par la formule

$$f_{\tilde{M},\omega}(\gamma) = \int_{U(F)\times K} f(k^{-1}u^{-1}\gamma uk)\omega^{-1}(k)\,du\,dk.$$

Cet homomorphisme dépend des choix de K et $\tilde{P}$. Mais il s'en déduit un homomorphisme $I(\tilde{G}(F),\omega)\to I(\tilde{M}(F),\omega)$ qui n'en dépend plus. Pour $\gamma\in\tilde{M}(F)\cap\tilde{G}_{reg}(F)$, on a simplement $I^{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f_{\tilde{M},\omega}) = I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ pourvu bien sûr que l'on choisisse une mesure unique sur le groupe $M_\gamma(F)=G_\gamma(F)$. L'homomorphisme ci-dessus dépend encore des choix de mesures de Haar, mais on le rend canonique en le considérant comme un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F)) & \to & I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F)) \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}_{\tilde{M},\omega} \end{array}$$

Notons $Norm_{G(F)}(\tilde{M})$ le normalisateur de $\tilde{M}$ dans $G(F)$ et posons $W(\tilde{M}) = Norm_{G(F)}(\tilde{M})/M(F)$. Le groupe $Norm_{G(F)}(\tilde{M})$ agit sur $C_c^\infty(\tilde{M}(F))$ par $(x,f)\mapsto xf$, où

$$(xf)(m) = \omega(x)f(x^{-1}mx).$$

Cette action se descend en une action de $W(\tilde{M})$ sur $I(\tilde{M}(F),\omega)$, donc aussi sur $I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$. L'image de l'homomorphisme ci-dessus est contenu dans le sous-espace des invariants par cette action. On décrira cette image en 4.3.

On note $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$ l'espace des $f\in I(\tilde{G}(F),\omega)$ tels que $f_{\tilde{M},\omega}=0$ pour tout espace de Levi propre $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. On note $C_{cusp}^\infty(\tilde{G}(F),\omega)$ l'espace des $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F),\omega)$ dont l'image dans $I(\tilde{G}(F),\omega)$ appartient à $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$.

Considérons le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. Pour $\gamma\in\tilde{M}(F)\cap\tilde{G}_{reg}(F)$, on sait qu'un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $M(F)$ dans la classe de conjugaison stable de γ dans $\tilde{M}(F)$ est aussi un tel ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de γ dans $\tilde{G}(F)$. Pour $f\in I(\tilde{G}(F),\omega)$, on a donc l'égalité $S^{\tilde{M}}(\gamma,f_{\tilde{M}}) = S^{\tilde{G}}(\gamma,f)$. Il en résulte que l'homomorphisme composé

$$I(\tilde{G}(F))\to I(\tilde{M}(F))\to SI(\tilde{M}(F))$$

se factorise en un homomorphisme

$$SI(\tilde{G}(F))\to SI(\tilde{M}(F))$$

que nous noterons aussi $f \mapsto f_{\tilde{M}}$. On note $SI_{cusp}(\tilde{G}(F))$ l'espace des $f \in SI(\tilde{G}(F))$ tels que $f_{\tilde{M}} = 0$ (dans $SI(\tilde{M}(F))$) pour tout espace de Levi propre $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. Ces définitions s'adaptent au cas où on considère une extension

$$1 \to C_1 \to G_1 \to G \to 1$$

où C_1 est un tore central induit, une extension compatible

$$\tilde{G}_1 \to \tilde{G}$$

et un caractère λ_1 de $C_1(F)$, et où on remplace l'espace $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ par $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1(F)$.

3.2 Données endoscopiques d'espace de Levi

Considérons un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. Comme on l'a expliqué, on peut réaliser le L-groupe ${}^LM$ comme un sous-groupe de ${}^LG$. Précisément, après avoir fixé comme en 1.4 une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\hat{G}$, on peut fixer une paire parabolique standard $(\hat{P}, \hat{M})$ fixe par Γ_F et $\hat{\theta}$ de sorte que $\hat{M} \rtimes W_F$ soit le L-groupe de M et $(\hat{M} \rtimes W_F)\hat{\theta}$ soit le L-espace ${}^L\tilde{M}$. On a alors un homomorphisme $H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to H^1(W_F; Z(\hat{M}))$. En fait, il ne dépend pas des choix. On note $\mathbf{a}_M$ l'image de $\mathbf{a}$ dans $H^1(W_F; Z(\hat{M}))$. Considérons une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ pour $(\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$. Quitte à conjuguer $\hat{\mathcal{E}}$ par un élément de $\hat{M}$, on suppose que $\tilde{\zeta}$ fixe $(\hat{B}, \hat{T})$. Dans la définition d'une telle donnée intervient un cocycle a_M tel que $ad_{\tilde{\zeta}}(m, w) = (a_M(w)m, w)$ pour tout $w \in W_F$. Sa classe est $\mathbf{a}_M$. Si on remplace $\tilde{\zeta}$ par un élément de $Z(\hat{M})\tilde{\zeta}$, ce cocycle est modifié par un cobord. Pour quelques instants, notons plus précisément $a_{M,\tilde{\zeta}}$ le cocycle associé à $\tilde{\zeta}$. On a

(1) dans l'ensemble $Z(\hat{M})\tilde{\zeta}$, il existe une unique classe modulo $Z(\hat{M})^{\Gamma_F} Z(\hat{G})$ telle que, pour $\tilde{\zeta}'$ dans cette classe, $a_{M,\tilde{\zeta}'}$ prenne ses valeurs dans $Z(\hat{G})$.

Preuve. L'hypothèse que $\mathbf{a}_M$ provient d'un élément de $H^1(W_F; Z(\hat{G}))$ entraîne qu'il existe au moins un $\tilde{\zeta}' \in Z(\hat{M})\tilde{\zeta}$ tel que $a_{M,\tilde{\zeta}'}$ prenne ses valeurs dans $Z(\hat{G})$. Fixons-en un et pour simplifier les notations, supposons que ce soit $\tilde{\zeta}$ lui-même. Pour $z \in Z(\hat{M})$, on calcule $a_{M,z\tilde{\zeta}}(w) = zw(z)^{-1}a_{M,\tilde{\zeta}}(w)$. Ce terme appartient à $Z(\hat{G})$ pour tout w si et seulement si l'image z_{ad} de z dans $Z(\hat{M}_{ad})$ est fixe par Γ_F (où $\hat{M}_{ad} = \hat{M}/Z(\hat{G})$). Or $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$ est connexe (c'est bien connu ; on rappelle la preuve dans celle de 3.3(2) ci-dessous) donc est l'image naturelle de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$. La condition équivaut donc à $z \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F} Z(\hat{G})$. $\square$

Quitte à remplacer $\tilde{\zeta}$ par un élément convenable de $Z(\hat{M})\tilde{\zeta}$, on peut supposer que $\tilde{\zeta}$ appartient à l'unique classe déterminée par (1). C'est ce que l'on supposera toujours, pour simplifier les notations. Autrement dit, on suppose que a_M prend ses valeurs dans $Z(\hat{G})$. Remarquons qu'alors, la classe de a_M dans $H^1(W_F; Z(\hat{G}))$ est égale à $\mathbf{a}$, d'après :

(2) l'homomorphisme $H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to H^1(W_F; Z(\hat{M}))$ est injectif.

Par la suite longue de cohomologie, cela résulte de la surjectivité remarquée ci-dessus de l'application $Z(\hat{M})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$.

Au lieu d'un espace de Levi et d'une donnée endoscopique de cet espace, considérons deux telles paires $(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ et $(\underline{\tilde{M}}, \underline{\mathbf{M}}')$, soumises aux mêmes hypothèses que ci-dessus. On réalise ${}^LM$ et ${}^L\underline{M}$ comme sous-groupes de ${}^LG$ et ${}^L\tilde{M}$ et ${}^L\underline{\tilde{M}}$ comme sous-ensembles de ${}^L\tilde{G}$ (il n'est pas nécessaire d'utiliser une paire de Borel commune). Appelons équivalence entre ces données un élément $x \in \hat{G}$ tel que $ad_x(\hat{M}) = \underline{\hat{M}}$, $ad_x(\mathcal{M}') = \underline{\mathcal{M}}'$, $ad_x(\tilde{\zeta}) \in Z(\underline{\hat{M}})\underline{\tilde{\zeta}}$.

Remarquons que les ensembles $\tilde{\mathcal{M}} = {}^L\tilde{M}$ et $\underline{\tilde{\mathcal{M}}} = {}^L\underline{\tilde{M}}$, réalisés comme sous-ensembles de ${}^L\tilde{G}$, sont des espaces de Levi et que les conditions imposées à x entraînent que $ad_x(\tilde{\mathcal{M}}) = \underline{\tilde{\mathcal{M}}}$. D'après 3.1(10), à x est donc associé une classe $gM(F)$ dans $W(\tilde{M}, \underline{\tilde{M}})$.

Fixons un isomorphisme $\iota' : M' \to \underline{M}'$ défini sur F dual à la restriction de ad_x^{-1} à $\hat{\underline{M}}'$. Remarquons que ad_g définit un isomorphisme de $\mathcal{Z}(\tilde{M})$ sur $\mathcal{Z}(\underline{\tilde{M}})$. De ces deux isomorphismes résulte un isomorphisme $\tilde{\iota}' : \tilde{M}' \to \underline{\tilde{M}}'$. Supposons $\mathbf{M}'$ relevant et fixons des données supplémentaires M'_1,...,Δ_1. Posons $\underline{M}'_1 = M'_1$, $\underline{C}_1 = C_1$, avec pour homomorphisme $\underline{M}'_1 \to \underline{M}'$ le composé de $M'_1 \to M'$ et de ι'. On pose $\underline{\tilde{M}}'_1 = \tilde{M}'_1$ muni de l'application $\underline{\tilde{M}}'_1 \to \underline{\tilde{M}}'$ composée de $\tilde{M}'_1 \to \tilde{M}'$ et de $\tilde{\iota}'$. On pose $\underline{\hat{\xi}}_1 = \hat{\xi}_1 \circ ad_x^{-1} : \underline{\mathcal{M}} \to {}^L\underline{M}'_1 = {}^LM'_1$. Ces données vérifient les conditions requises relativement à la donnée $\underline{\mathbf{M}}'$. Pour $(\delta_1, \gamma) \in \mathcal{D}_1$ (l'ensemble relatif aux premières données), on a $(\delta_1, g\gamma g^{-1}) \in \underline{\mathcal{D}}_1$ (l'ensemble relatif aux secondes). On vérifie l'égalité

$$\underline{\Delta}_1(\delta_1, g\gamma g^{-1}; \delta'_1, g\gamma' g^{-1}) = \Delta_1(\delta_1, \gamma; \delta'_1, \gamma').$$

On choisit alors pour facteur de transfert pour les secondes données le facteur

$$\underline{\Delta}_1(\delta_1, g\gamma g^{-1}) = \omega(g)\Delta_1(\delta_1, \gamma).$$

Cette définition ne dépend que de la classe $gM(F)$. Ces choix fournissent les isomorphismes extrêmes de la suite

$$C_c^\infty(\mathbf{M}') \simeq C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{M}'_1(F)) = C_{c,\lambda_1}^\infty(\underline{\tilde{M}}'_1(F)) \simeq C_c^\infty(\underline{\mathbf{M}}').$$

Ici encore, l'isomorphisme obtenu dépend du choix de ι'. Mais il devient indépendant de ce choix si on se limite à des fonctions invariantes par l'action des groupes adjoints. Comme en 2.6, dans le cas particulier où $\underline{\tilde{M}} = \tilde{M}$ et $\underline{\mathbf{M}}' = \mathbf{M}'$, on note $Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ le groupe des automorphismes de la paire $(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ (c'est-à-dire de ses équivalences avec elle-même). On obtient une action de ce groupe sur $C_c^\infty(\mathbf{M}')$. il y a une suite exacte

$$1 \to Aut(\mathbf{M}') \to Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}') \to W(\tilde{M}, \mathbf{M}') \to 1$$

où $W(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ est un sous-groupe de $W(\tilde{M})$. En particulier, on a une égalité d'espaces invariants

$$SI(\mathbf{M}')^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')} = (SI(\mathbf{M}')^{Aut(\mathbf{M}')})^{W(\tilde{M},\mathbf{M}')}.$$

3.3 Données endoscopiques de $\tilde{G}$ associées à une donnée endoscopique d'un espace de Levi

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique de $(\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$. On reprend la situation du début du paragraphe précédent et on note $\hat{P}$ le sous-groupe parabolique standard dont $\hat{M}$ est la composante de Levi standard. Pour $\tilde{s} \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\tilde{\zeta}$, posons $\hat{G}'(\tilde{s}) = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$ et $\mathcal{G}'(\tilde{s}) = \hat{G}'(\tilde{s})\mathcal{M}'$. On vérifie que $\mathcal{G}'(\tilde{s})$ est un groupe. Remarquons que :

(1) $\hat{M}'$ est un Levi de $\hat{G}'(\tilde{s})$.

En effet, d'après les définitions, $\hat{M}'$ est égal à $(\hat{M} \cap \hat{G}'(\tilde{s}))^0$. La même preuve qu'en 3.1(11) montre que $\hat{M}$ est le commutant de $Z(\hat{M})^{\hat{\theta},0}$ dans $\hat{G}$. Donc $\hat{M} \cap \hat{G}'(\tilde{s})$ est le commutant de $Z(\hat{M})^{\hat{\theta},0}$ dans $\hat{G}'(\tilde{s})$. Remarquons que $Z(\hat{M})^{\hat{\theta},0}$ est un tore dans $\hat{G}'(\tilde{s})$. Donc $\hat{M}\cap\hat{G}'(\tilde{s})$ est un Levi de ce groupe. Un Levi est connexe et (1) s'ensuit.

Fixons une paire de Borel épinglée de $\hat{G}'(\tilde{s})$ pour laquelle $(\hat{P}'(\tilde{s}),\hat{M}')$ est standard, où $\hat{P}'(\tilde{s})=\hat{G}'(\tilde{s})\cap\hat{P}$. On munit $\hat{G}'(\tilde{s})$ de l'unique action $\sigma\mapsto\sigma_{G'(\tilde{s})}$ de Γ_F conservant cette paire de Borel épinglée et telle que, pour tout $(m,w)\in\mathcal{M}'$, l'action par conjugaison de (m,w) sur $\hat{G}'(\tilde{s})$ soit égale à $w_{G'(\tilde{s})}$ composé avec un automorphisme intérieur. Cette action conserve la paire $(\hat{P}'(\tilde{s}),\hat{M}')$. On introduit un groupe dual $G'(\tilde{s})$ réductif connexe défini et quasi-déployé sur F. Alors $\mathbf{G}'(\tilde{s})=(G'(\tilde{s}),\mathcal{G}'(\tilde{s}),\tilde{s})$ est une donnée endoscopique pour $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. En particulier, il y a un espace endoscopique $\tilde{G}'(\tilde{s})$. Puisque la paire $(\hat{P}'(\tilde{s}),\hat{M}')$ est invariante par Γ_F, M' s'identifie à un Levi de $G'(\tilde{s})$ et on vérifie que l'espace endoscopique $\tilde{M}'$ s'identifie conformément à un espace de Levi de $\tilde{G}'(\tilde{s})$.

Soient $\delta\in\tilde{M}'_{reg}(F)$ et $\gamma\in\tilde{M}_{reg}(F)$. Si la classe de conjugaison par M' de δ correspond à la classe de conjugaison par M de γ, alors la classe de conjugaison par $G'(\tilde{s})$ de δ correspond à la classe de conjugaison par G de γ. Autrement dit $\mathcal{D}(\mathbf{M}')\subset\mathcal{D}(\mathbf{G}'(\tilde{s}))$. Inversement, pour $(\delta,\gamma)\in\mathcal{D}(\mathbf{G}'(\tilde{s}))\cap(\tilde{M}'(F)\times\tilde{M}(F))$, il existe un élément $n\in Norm_{G(F)}(\tilde{M})$ tel que $(\delta,n\gamma n^{-1})$ appartienne à $\mathcal{D}(\mathbf{M}')$. Supposons $\mathbf{M}'$ relevant. Alors $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ l'est aussi. On voit que le bifacteur de transfert pour la donnée $\mathbf{M}'$ coïncide avec la restriction à $\mathcal{D}(\mathbf{M}')\times\mathcal{D}(\mathbf{M}')$ du bifacteur de transfert pour la donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s})$. Fixons des données auxiliaires $G'_1(\tilde{s})$, $\tilde{G}'_1(\tilde{s})$, $C_1(\tilde{s})$, $\hat{\xi}_1(\tilde{s})$, $\Delta_1(\tilde{s})$. On note $\lambda_1(\tilde{s})$ le caractère de $C_1(\tilde{s})$ associé à ces données. On note $M'_1(\tilde{s})$ et $\tilde{M}'_1(\tilde{s})$ les images réciproques de M' et $\tilde{M}'$ dans $G'_1(\tilde{s})$ et $\tilde{G}'_1(\tilde{s})$. On note $\hat{\xi}_{1,M'}(\tilde{s})$ la restriction de $\hat{\xi}_1(\tilde{s})$ à $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}_{1,M'}$ l'image réciproque de $\mathcal{D}(\mathbf{M}')$ dans $\mathcal{D}_1$ et $\Delta_{1,M'}(\tilde{s})$ la restriction de $\Delta_1(\tilde{s})$ à $\mathcal{D}_{1,M'}$. Alors $(M'_1(\tilde{s}),\tilde{M}'_1(\tilde{s}),C_1(\tilde{s}),\hat{\xi}_{1,M'}(\tilde{s}),\Delta_{1,M'}(\tilde{s}))$ sont des données auxiliaires pour $\mathbf{M}'$. Par une variante de la construction de 3.1, on a un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} I_{\lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{G}'_1(\tilde{s};F))\otimes Mes(G'(\tilde{s};F)) & \to & I_{\lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{M}'_1(\tilde{s};F))\otimes Mes(M'(F)) \\ f & \mapsto & f_{\tilde{M}'} \end{array}$$

On vérifie que, quand on change de données auxiliaires, ces homomorphismes sont compatibles aux applications de recollement de 2.5. On obtient un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} I(\mathbf{G}'(\tilde{s}))\otimes Mes(G'(\tilde{s};F)) & \to & I(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F)) \\ f & \mapsto & f_{\tilde{M}'} \end{array}$$

Pour $\lambda\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$ et $\nu\in Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, posons $\tilde{s}'=\nu\lambda\tilde{s}\lambda^{-1}$. Alors la donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s}')$ est équivalente à $\mathbf{G}'(\tilde{s})$, l'équivalence étant définie par λ. Dans les constructions où seule la classe d'équivalence de $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ importe, on pourra considérer que $\tilde{s}$ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison par $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$ dans $\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$. Par l'application $z\mapsto\tilde{\zeta}z$, cet ensemble de classes de conjugaison s'identifie à $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}))$. On le remplacera souvent par $\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ grâce à l'assertion suivante. On y note $\theta^{\tilde{M}}$ l'automorphisme de $\mathcal{A}_M$ induit par ad_γ pour n'importe quel $\gamma\in\tilde{M}$. On a

(2) l'homomorphisme naturel

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}\to Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}))$$

est surjectif; son noyau a pour nombre d'éléments $|det((1-\theta^{\tilde{M}})_{|\mathcal{A}_M/(\mathcal{A}_{\tilde{M}}+\mathcal{A}_G)})|$.

Preuve. Introduisons l'ensemble des racines simples Δ de $\hat{T}$, le sous-ensemble Δ^M associé à $\hat{M}$ et celui des copoids fondamentaux $\{\check{\varpi}_\alpha;\alpha\in\Delta\}\subset X_*(\hat{T}_{ad})$. Le groupe $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$ est le sous-groupe des éléments $\prod_{\alpha\in\Delta-\Delta^M}\check{\varpi}_\alpha(t_\alpha)\in\hat{T}_{ad}$ avec $t_\alpha\in\mathbb{C}^\times$ et

$\alpha \mapsto t_\alpha$ est constante sur les orbites de Γ_F dans $\Delta - \Delta^M$. Donc $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$ est connexe. Il en résulte que l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$$

est surjectif. Le même calcul montre que $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ est connexe et que l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

est surjectif. Les ensembles de départ et d'arrivée de l'homomorphisme (2) s'identifient respectivement à $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ et $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}/(1-\hat{\theta})(Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F})$. Tout se décompose selon les orbites dans $\Delta - \Delta^M$ de l'action du groupe engendré par Γ_F et $\hat{\theta}$, ce qui nous ramène au cas où il n'y a qu'une seule orbite. Fixons un élément $\alpha \in \Delta - \Delta^M$, notons $[\alpha]$ son orbite sous l'action de Γ_F, n le plus petit entier ≥ 1 tel que $\hat{\theta}^n(\alpha) \in [\alpha]$ et posons $\check{\varpi}_{[\alpha]} = \sum_{\beta\in[\alpha]} \check{\varpi}_\beta$. Un élément de $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$ s'écrit $\prod_{i=0,...,n-1} \check{\varpi}_{\hat{\theta}^i[\alpha]}(t_i)$, avec des $t_i \in \mathbb{C}^\times$. Il appartient à $(1-\hat{\theta})(Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F})$ si et seulement si $\prod_i t_i = 1$. Il appartient à $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ si et seulement si les t_i sont tous égaux. Il résulte de cette description que notre homomorphisme est surjectif et que son noyau a n éléments. Or n est égal au déterminant figurant dans l'assertion (2). $\square$

On a aussi

(3) l'ensemble des $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tels que $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ soit une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ est fini ; si $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}$, cet ensemble n'est pas vide.

Preuve. Cf. [W2] 3.2(1) pour la finitude. Pour la deuxième assertion, utilisons les mêmes notations que dans la preuve précédente. Ecrivons $\tilde{\zeta} = \zeta\hat{\theta}$. Soit Δ_0 un ensemble de représentants dans $\Delta - \Delta^M$ des orbites pour l'action du groupe engendré par Γ_F et $\hat{\theta}$. L'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} & \to & (\mathbb{C}^\times)^{\Delta_0} \\ x & \mapsto & (\alpha(x))_{\alpha\in\Delta_0} \end{array}$$

est surjective à noyau fini. Il existe donc $x \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ tel que $(N\alpha)(x\zeta) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. Pour un tel élément, posons $\tilde{s} = x\tilde{\zeta}$. L'algèbre de Lie de $\hat{G}'(\tilde{s})$ contient $\sum_{i=0,...,n_\alpha-1}(ad_{\tilde{s}})^i(\hat{E}_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$, où n_α est le plus petit entier $i \geq 1$ tel que $\hat{\theta}^i(\alpha) = \alpha$. Un élément de $Z(\hat{G}'(\tilde{s}))$ fixe cet élément donc aussi chaque composante $\hat{E}_{\hat{\theta}^i\alpha}$. Remarquons que les actions galoisiennes relatives à $\hat{G}$ et à $\hat{G}'(\tilde{s})$ coïncident sur $Z(\hat{G}'(\tilde{s})) \cap Z(\hat{M})$. Un élément de $Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{M})$ fixe donc $\hat{E}_{\sigma\hat{\theta}^i\alpha}$ pour tous $\alpha \in \Delta_0$, $i \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \Gamma_F$. Donc il fixe $\hat{E}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^M$. Appartenant de plus à $Z(\hat{M})$, il fixe tout $\hat{G}$. Donc $Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{M}) \subset Z(\hat{G})$. Or

$$Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F,0} \subset Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0} = Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$$

par l'hypothèse d'ellipticité de $\mathbf{M}'$. Donc $Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F,0} \subset Z(\hat{G})$ et forcément $Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F,0} \subset Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. $\square$

3.4 Levi de données endoscopiques

Soient $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ et $M' \subset G'$ un Levi, auquel est associé un espace de Levi $\tilde{M}'$ (puisque $\tilde{G}'$ est à torsion intérieure). On fixe une paire de Borel épinglée de $\hat{G}'$ et on normalise l'action galoisienne sur ce groupe de sorte qu'elle conserve cette paire. Le choix d'un parabolique P' de G' de composante de Levi M' permet d'identifier $\hat{M}'$ à un Levi standard de $\hat{G}'$, donc à un sous-groupe de $\hat{G}$. Notons $\hat{M}$, $\mathcal{M}$, $\tilde{\mathcal{M}}$ les commutants de $Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0}$ dans $\hat{G}$, ${}^LG$, ${}^L\tilde{G}$. Fixons $x_* \in X_*(Z(\hat{M}')^{\Gamma_F,0})$ en position générale. Il détermine un sous-groupe parabolique $\hat{P}$ de $\hat{G}$, engendré par $\hat{M}$ et les sous-groupes radiciels associés aux racines α de $\hat{T}$ telles que $< \alpha, x_* >> 0$ ($\hat{T}$ étant choisi comme en 1.5). On pose $\mathcal{P} = \hat{P}\mathcal{M}$, $\tilde{\mathcal{P}} = \hat{P}\tilde{\mathcal{M}}$. Le couple $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{M}})$ est une paire parabolique de ${}^L\tilde{G}$. Les seuls points non évidents à vérifier sont que la projection de $\mathcal{P}$ sur W_F est surjective et que $\tilde{\mathcal{P}}$ est non vide. Mais $\tilde{s}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}$, ce qui vérifie ce deuxième point. Pour $w \in W_F$, il existe $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_w} agisse sur $\hat{G}'$ comme $w_{G'}$. Alors ad_{g_w} fixe x_* donc aussi $\hat{P}$. Donc $g_w \in \mathcal{P}$, ce qui vérifie le premier point. On pose $\mathcal{M}' = \mathcal{G}' \cap \mathcal{M}$. On se rappelle qu'il y a une injection de l'ensemble des paires paraboliques de $\tilde{G}$ dans celui des paires paraboliques de ${}^L\tilde{G}$. Si G n'est pas quasi-déployé, $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{M}})$ peut ne pas appartenir à l'image : c'est le cas si et seulement si $(\hat{P}, \hat{M})$ ne contient pas de conjugué d'une paire $(\hat{P}_0, \hat{M}_0)$ comme en 3.1. On sait que les Levi $\hat{M}_0$ ont une propriété particulière : tous les paraboliques ayant $\hat{M}_0$ comme composante de Levi sont conjugués. Cela entraîne que la condition précédente ne dépend que de $\hat{M}$ et pas du choix de $\hat{P}$. Supposons que $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{M}})$ soit l'image d'une paire parabolique $(\tilde{P}, \tilde{M})$ de $\tilde{G}$. On dira dans ce cas que $\hat{M}$ correspond à l'espace de Levi $\tilde{M}$. Alors $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{s})$ est une donnée endoscopique pour $(\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$. Cette donnée est elliptique par construction. Même si $\mathbf{G}'$ est relevant, il peut se produire que $\mathbf{M}'$ ne le soit pas. On dira que M' est relevant si d'une part, $\hat{M}$ correspond à un espace de Levi $\tilde{M}$, d'autre part $\mathbf{M}'$ est relevant. Dans ce cas, comme dans le paragraphe précédent, des données auxiliaires pour $\mathbf{G}'$ se restreignent en des données auxiliaires pour $\mathbf{M}'$ et on définit un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} I(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(F)) & \to & I(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F)) \\ f & \mapsto & f_{\tilde{M}'} \end{array}$$

En fait, seule la classe d'équivalence des données $(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ est bien déterminée car on a effectué divers choix. Changer ces choix compose l'homomorphisme ci-dessus par des éléments de $Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}')$. Cela entraîne la propriété suivante : si f est un élément de $I(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(F))$ et φ est un élément de $I(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))$ invariant par l'action de $Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}')$, alors la relation $f_{\tilde{M}'} = \varphi$ est indépendante des choix. De même, levons l'hypothèse que M' est relevant, supposons seulement que $\mathbf{G}'$ le soit. On ne peut plus définir d'espace $I(\mathbf{M}')$. Mais, pour $f \in I(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(F))$, la relation $f_{\tilde{M}'} = 0$ a un sens : elle signifie que si, par le choix de données auxiliaires, on identifie f à un élément $f_1 \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)) \otimes Mes(G'(F))$, alors $(f_1)_{\tilde{M}'_1} = 0$. Ceci est indépendant du choix des données auxiliaires.

On peut remplacer dans les constructions ci-dessus les espaces $I(\mathbf{G}')$ par $SI(\mathbf{G}')$.

3.5 K-espaces

Supposons $F = \mathbb{R}$ et considérons un K-espace $K\tilde{G}$ sur un K-groupe KG comme en 1.11. Les constructions des quatre paragraphes précédents valent pour chaque composante $\tilde{G}_p$. Mais en travaillant composante par composante, on perd la notion de K-espace. Pour la retrouver, il faut définir correctement les notions d'espace parabolique et d'espace de Levi d'un K-espace. Sur $\mathbb{C}$, tous les groupes G_p ou espaces $\tilde{G}_p$ sont isomorphes, d'où une correspondance bijective entre leurs classes de conjugaison de paires paraboliques. On définit une paire parabolique (KP, KM) de KG sur $\mathbb{C}$ comme une famille $(P_p, M_p)_{p\in\Pi}$, où (P_p, M_p) est une paire parabolique (sur $\mathbb{C}$) de G_p de sorte que, pour $p, p' \in \Pi$, les classes de conjugaison de (P_p, M_p) et $(P_{p'}, M_{p'})$ se correspondent. On définit de même une paire parabolique de $K\tilde{G}$. La définition est plus subtile sur $\mathbb{R}$. On définit une paire parabolique (KP, KM) (sur $\mathbb{R}$, précision que l'on omettra dans la suite) comme une famille $(P_p, M_p)_{\alpha\in\Pi'}$ où

- Π' est un sous-ensemble non vide de Π ;

- pour tout $p \in \Pi'$, (P_p, M_p) est une paire parabolique (sur $\mathbb{R}$) de G_p ;

- pour $p, p' \in \Pi'$, les classes de conjugaison de (P_p, M_p) et $(P_{p'}, M_{p'})$ se correspondent ;

- pour $p \in \Pi - \Pi'$, la classe de conjugaison de paires paraboliques de G_p correspondant à celles des $(P_{p'}, M_{p'})$ pour $p' \in \Pi'$ ne contient aucun élément défini sur $\mathbb{R}$.

En particulier, si $\Pi' \neq \Pi$, une telle paire n'est pas une paire parabolique sur $\mathbb{C}$. On définit un Levi de KG comme une famille KM intervenant dans une paire parabolique (KP, KM). On définit de même les paires paraboliques et les espaces de Levi de $K\tilde{G}$. On appellera plutôt ces derniers des K-espaces de Levi. Si $(K\tilde{P}, K\tilde{M})$ est une paire parabolique de $K\tilde{G}$, la paire sous-jacente (KP, KM) est une paire parabolique de KG. On a

(1) tout espace de Levi $K\tilde{M}$ s'identifie à un K-espace tordu sur le K-groupe KM.

Preuve. On complète $K\tilde{M}$ en une paire parabolique $(K\tilde{P}, K\tilde{M})$. On fixe p_0 dans l'ensemble d'indices Π' relatif à cette paire, on pose $G = G_{p_0}$, $M = M_{p_0}$ etc... Pour $p \in \Pi'$, on choisit $x_p \in G_{SC}$ tel que $ad_{x_p} \circ \phi_{p_0,p}$ envoie (P_p, M_p) sur (P, M). On note ϕ_p^M la restriction de $ad_{x_p} \circ \phi_{p_0,p}$ à M_p et $\tilde{\phi}_p^M$ celle de $ad_{x_p} \circ \tilde{\phi}_{p_0,p}$ à $\tilde{M}_p$. Pour $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$, on pose $\nabla_p^M(\sigma) = x_p \nabla_{p_0,p}(\sigma)\sigma(x_p)^{-1}$. On vérifie que ∇_p^M est un cocycle, à valeurs dans G_{SC}. On a $\phi_p^M \circ \sigma(\phi_p^M)^{-1} = ad_{\nabla_p^M(\sigma)}$, $\tilde{\phi}_p^M \circ \sigma(\tilde{\phi}_p^M)^{-1} = ad_{\nabla_p^M(\sigma)}$. Puisque $\phi_p^M \circ \sigma(\phi_p^M)^{-1}$ préserve (P, M), on en déduit $\nabla_p^M(\sigma) \in M_{sc}$. D'après le théorème 1.2 de [K2], l'image de l'application

$$(2) \qquad H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M_{SC}) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M_{sc})$$

est le noyau d'une application $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M_{sc}) \to \pi_0(Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$. Or $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ est connexe car $Z(\hat{M}_{ad})$ est un tore induit. Donc l'application (2) est surjective et, quitte à modifier l'élément x_p, on peut relever ∇_p^M en un cocycle $\nabla_p^{M_{SC}}$ à valeurs dans M_{SC}. Pour prouver que $K\tilde{M}$ est un K-espace tordu issu de $\tilde{M}$ comme en 1.11, il reste à prouver que la famille $(\nabla_p^{M_{SC}})_{p\in\Pi'}$ s'envoie bijectivement sur $\pi(H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M_{SC})) \cap H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M)^\theta$ (où θ est déterminé par $\tilde{M}$). Puisque M est un Levi de G, l'application $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G)$ est injective. Elle est équivariante pour l'action de θ. Il en résulte qu'un élément de $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M)$ est invariant par θ si et seulement si son image dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G)$ l'est. L'image de $\nabla_p^{M_{SC}}$ dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G)$ est égale à celle de $\nabla_{p_0,p}$, donc est invariante par θ. Donc l'image de $\nabla_p^{M_{SC}}$ dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M)$ est invariante par θ. De même, pour $p, q \in \Pi'$ avec $p \neq q$, les images de $\nabla_p^{M_{SC}}$ et $\nabla_q^{M_{SC}}$ dans cet ensemble sont distinctes car leurs images dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G)$ le sont. Soit enfin $\nabla^M : \Gamma_{\mathbb{R}} \to M$ un cocycle dont la classe appartient à $\pi(H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}, M_{SC})) \cap H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M)^\theta$. Son image ∇^G dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G)$ appartient à $\pi(H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}, G_{SC})) \cap H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G)^\theta$. Il existe donc $p \in \Pi$ tel que ∇^G soit cohomologue à $\nabla_{p_0,p}$. Fixons $y \in G$ tel que $\nabla^M(\sigma) = y\nabla_{p_0,p}(\sigma)\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$. Puisque ∇^M prend ses valeurs dans M, cette relation implique que l'image réciproque (P'_p, M'_p) de (P, M) par l'application $ad_y \circ \phi_{p_0,p}$ est une paire de Borel de G_p qui est définie sur $\mathbb{R}$. Cette paire est conjuguée par un élément de $G_p(\mathbb{C})$ à l'image réciproque de (P, M) par l'application $\phi_{p_0,p}$. Il en résulte que $p \in \Pi'$ et que les paires de Borel (P'_p, M'_p) et (P_p, M_p) sont conjuguées par un élément de $G_p(\mathbb{C})$.

Etant toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, elles sont conjuguées par un élément de $G_p(\mathbb{R})$. On peut donc fixer un élément $g_p \in G_p(\mathbb{R})$ tel que $ad_y \circ \phi_{p_0,p} \circ ad_{g_p}(P_p, M_p) = (P, M)$. En posant $g = \phi_{p_0,p}(g_p)$, cela équivaut à $ad_{yg} \circ \phi_{p_0,p}(P_p, M_p) = (P, M)$. Cela entraîne que l'élément $m = ygx_p^{-1}$ appartient à M. Parce que $g_p \in G_p(\mathbb{R})$, on vérifie que la multiplication de y par g ne modifie pas l'égalité de cocycles ci-dessus, c'est-à-dire que l'on a $\nabla^M(\sigma) = yg\nabla_{p_0,p}(\sigma)\sigma(yg)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$. Ou encore $\nabla^M(\sigma) = m\nabla_p^M(\sigma)\sigma(m)^{-1}$. Donc ∇^M a même classe dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; M)$ que ∇_p^M. Cela achève la preuve de (1). $\square$

On doit décrire comme en 3.1 la correspondance entre classes de conjugaison de paires paraboliques de $K\tilde{G}$ et classes de conjugaison de paires paraboliques de $\hat{G}$. Dans le cas non tordu, cette correspondance est décrite par le lemme 2.1 de [A1]. A priori, celui-ci ne s'applique pas dans le cas général car, comme on l'a dit en 1.11, notre notion de K-groupes est plus restrictive que celle d'Arthur. Nous allons prouver que ce lemme reste malgré tout valable. Fixons une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_{\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}\in\hat{\Delta}})$ de $\hat{G}$. On suppose qu'elle est stable par l'action galoisienne et on fixe un élément $\hat{\theta}$ relatif à cette paire. On note $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ l'action galoisienne. Les sous-groupes paraboliques standard $\hat{P} = \hat{M}\hat{U}$ qui sont stables par $\hat{\theta}$ et par l'action galoisienne sont en bijection avec les sous-ensembles $\hat{\Delta}^{\hat{M}}$ de $\hat{\Delta}$ qui vérifient les mêmes propriétés de stabilité ($\hat{\Delta}^{\hat{M}}$ est l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{M}$).

D'autre part, fixons une composante de notre K-espace $K\tilde{G}$, que l'on note simplement $\tilde{G}$. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G et fixons une cochaîne $\sigma \mapsto u(\sigma)$ de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ dans G_{SC} de sorte que $ad_{u(\sigma)} \circ \sigma_G(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ (où $\sigma \mapsto \sigma_G$ est l'action naturelle). On définit l'action quasi-déployée $\sigma \mapsto \sigma_{G^*} = ad_{u(\sigma)} \circ \sigma_G$ de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ sur G et, pour simplifier, on note G^* le groupe G muni de cette action. On note θ^* l'automorphisme ad_e pour un élément $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ quelconque. Cet automorphisme préserve $\mathcal{E}$ et l'action galoisienne quasi-déployée. La bijection naturelle $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ de Δ sur $\hat{\Delta}$ est équivariante pour les actions galoisiennes et échange l'action de θ^* avec celle de $\hat{\theta}$. Posons $u^*(\sigma) = u(\sigma)^{-1}$ et notons $u^*_{ad}(\sigma)$ l'image de $u^*(\sigma)$ dans G^*_{AD}. On vérifie que u^*_{ad} est un cocycle, qui définit un élément de $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G^*_{AD})$ noté encore u^*_{ad}. On a une application naturelle

$$H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G^*_{AD}) \to H^2(\Gamma_{\mathbb{R}}; Z(G^*_{SC})).$$

Ce dernier groupe s'identifie facilement au groupe des caractères de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ qui sont triviaux sur l'image de la norme

$$Z(\hat{G}_{SC}) \to Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_R}.$$

On renvoie pour cela à [K2], théorème 1.2. Ainsi, u^*_{ad} définit un caractère $\chi_{K\tilde{G}}$ de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. On a fait divers choix, qui affectent même notre construction de G^*. Quand on change de choix, on voit que les deux groupes G^* construits s'identifient naturellement et que le caractère $\chi_{K\tilde{G}}$ obtenu est le même. C'est facile à voir pourvu que l'on conserve la même composante connexe $\tilde{G}$. Considérons une autre composante $\tilde{G}'$. Par définition, il y a un isomorphisme $\phi : G' \to G$ et un cocycle $\nabla \in H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{SC})$ tel que $\phi \circ \sigma(\phi)^{-1} = ad_{\nabla(\sigma)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$. On prend pour paire de Borel épingée $\mathcal{E}' = \phi^{-1}(\mathcal{E})$. On vérifie que l'on peut choisir $u'(\sigma) = \phi^{-1}(u(\sigma)\nabla(\sigma))$. Il est clair que ϕ définit un isomorphisme défini sur $\mathbb{R}$ de G'^* sur G^*. Via cet isomorphisme, $u'^*(\sigma)$ s'identifie à $\nabla(\sigma)u^*(\sigma)$. Le calcul montre que la condition que ∇ est un cocycle (pour l'action naturelle sur G) équivaut à ce que $d(\nabla u^*) = d(u^*)$, où d est la différentielle sur G^*. Les images de u^* et ∇u^* dans $H^2(\Gamma_{\mathbb{R}}; Z(G^*_{SC}))$ sont donc les mêmes et on récupère ainsi le même caractère $\chi_{K\tilde{G}}$. Remarquons que, par hypothèse, $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est non vide. On peut donc fixer $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$. Ecrivons $\gamma=ge$, avec $g\in G$ et $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$. Pour tout $\sigma\in\Gamma_{\mathbb{R}}$, on a encore $ad_{u(\sigma)}\circ\sigma_G(e)\in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$, donc il existe $z(\sigma)\in Z(G)$ tel que $ad_{u(\sigma)}\circ\sigma_G(e)=z(\sigma)^{-1}e$. La condition $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$ équivaut à ce que, pour tout $\sigma\in\Gamma_{\mathbb{R}}$, on ait l'égalité $\sigma_G(\gamma)=\gamma$. Or on a les équivalences suivantes

$$\sigma_G(\gamma)=\gamma \iff \sigma_G(g)\sigma_G(e)=ge \iff g^{-1}\sigma_G(g)ad_{u(\sigma)^{-1}}(z(\sigma)^{-1}e)=e$$

$$\iff g^{-1}\sigma_G(g)u(\sigma)^{-1}\theta^*(u(\sigma))z(\sigma)^{-1}e=e \iff g^{-1}\sigma_G(g)u(\sigma)^{-1}\theta^*(u(\sigma))z(\sigma)^{-1}=1$$

$$\iff g^{-1}u^*(\sigma)\sigma_{G^*}(g)=z(\sigma)\theta^*(u^*(\sigma)).$$

Il en résulte que la classe du cocycle u^*_{ad} est invariante par θ^*, donc $\chi_{K\tilde{G}}$ est invariant par $\hat{\theta}$.

Pour $x_*\in X_*(\hat{T}_{ad})$, choisissons un entier $N\geq 1$ tel que $Nx_*\in X_*(\hat{T}_{sc})$. Alors l'élément $Nx_*(e^{2\pi i/N})$ appartient à $Z(\hat{G}_{SC})$ et ne dépend pas du choix de N. L'application $x_*\mapsto Nx_*(e^{2\pi i/N})$ se quotient en un isomorphisme

$$X_*(\hat{T}_{ad})/X_*(\hat{T}_{sc})\simeq Z(\hat{G}_{SC}).$$

A tout élément $\alpha\in\Delta$ est naturellement associé un copoids $\varpi_\alpha\in X_*(\hat{T}_{ad})$. On note $\varpi_\alpha^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ la somme des éléments $\varpi_{\alpha'}$ pour les α' dans l'orbite de α sous l'action de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ (puisque ce groupe a deux éléments, les orbites ont au plus deux éléments). L'élément $\varpi_\alpha^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ s'envoie sur un élément de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. On note Δ_{min} l'ensemble des $\alpha\in\Delta$ tels que $\chi_{K\tilde{G}}(\varpi_\alpha^{\Gamma_{\mathbb{R}}})\neq 1$. On note $\hat{\Delta}_{min}$ l'ensemble des $\hat{\alpha}$ pour $\alpha\in\Delta_{min}$. Cet ensemble est stable par l'action galoisienne et aussi par $\hat{\theta}$ puisque $\chi_{\tilde{G}}$ l'est.

Lemme. *Soit $\hat{P}=\hat{M}\hat{U}$ un sous-groupe parabolique standard de $\hat{G}$ stable par $\hat{\theta}$ et par l'action galoisienne. Alors $\hat{P}$ correspond à une classe de conjugaison de sous-K-espaces paraboliques de $K\tilde{G}$ si et seulement si $\hat{\Delta}^{\hat{M}}$ contient $\hat{\Delta}_{min}$.*

C'est exactement l'énoncé du lemme 2.1 de [A1]. Nous le prouverons dans le paragraphe suivant.

Il résulte de ce lemme que

(3) parmi les classes de conjugaison par $KG(\mathbb{R})$ de paires paraboliques de KG, il y a une unique classe minimale.

Une propriété équivalente est qu'il y a au moins un $p\in\Pi$ tel que G_p soit "plus quasi-déployé" que les autres composantes.

On doit définir correctement les espaces $\mathcal{L}(K\tilde{M})$, $\mathcal{P}(K\tilde{M})$ et $\mathcal{F}(K\tilde{M})$ pour un K-espace de Levi $K\tilde{M}$. Si l'on définit $\mathcal{L}(K\tilde{L})$ comme l'ensemble des K-espaces de Levi de $K\tilde{G}$ contenant $K\tilde{M}$, il y en a beaucoup trop. Pour cela, on fixe pour tout $p\in\Pi$ une paire parabolique minimale $(P_{p,0},M_{p,0})$, qui donne naissance à une paire d'espaces tordus $(KP_{p,0},KM_{p,0})$. Le résultat précédent entraîne qu'il existe un unique sous-ensemble non vide Π^{M_0} de Π vérifiant les deux conditions suivantes :

- la famille $K\tilde{M}_0=(\tilde{M}_{p,0})_{p\in\Pi^{M_0}}$ est un K-espace de Levi de $K\tilde{G}$;

- pour tous $p\in\Pi$, $p'\in\Pi^{M_0}$, il existe $x_{p',p}\in G_{p'}$ tel que $ad_{x_{p',p}}\circ\tilde{\phi}_{p',p}(\tilde{P}_{p,0},\tilde{M}_{p,0})$ contienne $(\tilde{P}_{p',0},\tilde{M}_{p',0})$.

On fixe de tels éléments $x_{p',p}$. La construction suivante ne dépendra pas de leur choix. Il est facile de montrer que, pour tout K-espace de Levi $K\tilde{L}=(\tilde{L}_p)_{p\in\Pi^L}$ de $K\tilde{G}$, l'ensemble d'indices Π^L contient Π^{M_0}. On note $\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ l'ensemble des K-espaces de Levi $K\tilde{L}=(\tilde{L}_p)_{p\in\Pi^L}$ de $K\tilde{G}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\tilde{L}_p \supset \tilde{M}_{p,0}$ pour tout $p \in \Pi^L$;
- $ad_{x_{p',p}} \circ \tilde{\phi}_{p',p}(\tilde{L}_p) = \tilde{L}_{p'}$ pour tous $p \in \Pi^L$, $p' \in \Pi^{M_0}$.

Pour $K\tilde{M} = (\tilde{M}_p)_{p\in\Pi^M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$, on note $\mathcal{L}(K\tilde{M})$ l'ensemble des $K\tilde{L} = (\tilde{L}_p)_{p\in\Pi^L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ tels que $\Pi^M \subset \Pi^L$ et $\tilde{M}_p \subset \tilde{L}_p$ pour tout $p \in \Pi^M$. On définit de façon similaire les ensembles $\mathcal{P}(K\tilde{M})$ et $\mathcal{F}(K\tilde{M})$.

Les considérations des quatre paragraphes précédents s'adaptent aux objets définis ci-dessus. Du côté dual, il faut bien sûr prendre pour paire $(\hat{P}_0, \hat{M}_0)$ une paire qui correspond à (KP_0, KM_0).

3.6 Preuve du lemme 3.5

La nécessité de la condition résulte du lemme d'Arthur. Nos K-groupes peuvent se compléter en K-groupes au sens d'Arthur. Si un sous-groupe parabolique $\hat{P} = \hat{M}\hat{U}$ (standard, invariant par $\hat{\theta}$ et par l'action galoisienne) correspond à une classe de conjugaison de sous-K-espaces paraboliques de $K\tilde{G}$, il correspond a fortiori à une classe de conjugaison de sous-K-groupes paraboliques de ce K-groupe étendu, donc vérifie l'inclusion $\hat{\Delta}^{\hat{M}} \supset \hat{\Delta}_{min}$.

Pour la réciproque, il suffit de traiter l'unique sous-groupe parabolique $\hat{P} = \hat{M}\hat{U}$ tel que $\hat{\Delta}^{\hat{M}} = \hat{\Delta}_{min}$. En effet, si celui-ci correspond bien à une classe de conjugaison de sous-K-espaces paraboliques de $K\tilde{G}$, on peut fixer une composante $\tilde{G}$ de $K\tilde{G}$ et un sous-espace parabolique $\tilde{P}$ de $\tilde{G}$ correspondant à $\hat{P}$. Les considérations de 3.1 s'appliquent à cette composante. En particulier, tout sous-groupe parabolique $\hat{P}'$ contenant $\hat{P}$ et invariant par $\hat{\theta}$ et par l'action galoisienne correspond à un sous-espace parabolique $\tilde{P}'$ de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{P}$. Dorénavant, on note $\hat{P}$ le sous-groupe "minimal" défini ci-dessus.

Montrons que l'on peut se ramener au cas où $K\tilde{G}$ n'a pas d'autre espace de Levi que lui-même. En effet, supposons qu'il existe un espace parabolique propre $K\tilde{Q}$, de Levi $K\tilde{L}$. Il correspond à $K\tilde{L}$ un sous-ensemble Δ^L de Δ, d'où un sous-ensemble $\hat{\Delta}^L$ de $\hat{\Delta}$. Remplaçant dans les constructions $K\tilde{G}$ par $K\tilde{L}$, on définit un sous-ensemble $\hat{\Delta}^L_{min}$ de $\hat{\Delta}^L$. Si on suppose l'assertion prouvée pour $K\tilde{L}$, il correspond à ce sous-ensemble $\hat{\Delta}^L_{min}$ un sous-espace parabolique de $K\tilde{L}$, d'où aussi un sous-espace parabolique de $K\tilde{G}$. Pour obtenir l'assertion cherchée pour $\tilde{G}$, il suffit de prouver l'égalité

(1) $\Delta_{min} = \Delta^L_{min}$.

Par le sens déjà prouvé du lemme, on a en tout cas $\Delta_{min} \subset \Delta^L$. En affectant des exposants L aux termes construits à l'aide de $K\tilde{L}$, les définitions nous ramènent à prouver l'égalité

(2) $\chi_{K\tilde{G}}(\varpi_\alpha^{\Gamma_\mathbb{R}}) = \chi_{K\tilde{L}}(\varpi_\alpha^{L,\Gamma_\mathbb{R}})$ pour tout $\alpha \in \Delta^L$.

Fixons une composante $\tilde{L}$ de $K\tilde{L}$, qui est incluse dans une composante $\tilde{G}$ de $K\tilde{G}$. On utilise ces composantes pour effectuer les constructions du paragraphe précédent, en les affectant d'exposants G ou L. On suppose que $\tilde{L}$ est standard pour la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ et on prend pour paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^L$ la restriction de $\mathcal{E}$. On peut alors supposer que $u^*(\sigma)$ est le produit d'un élément de $Z(L_{sc})$ et de l'image de $u^{*L}(\sigma) \in L^*_{SC}$ dans G^*_{SC}. Alors u^* est une cochaîne à valeurs dans L_{sc}, qui définit un élément de $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; L_{ad})$ que l'on note v^*. On a des applications naturelles

$$\begin{array}{ccc} & & H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{AD}) \\ & \nearrow & \\ H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; L_{ad}) & & \\ & \searrow & \\ & & H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; L_{AD}). \end{array}$$

L'élément v^* s'envoie sur u^*_{ad} par la flèche du haut et sur u^{*L}_{ad} par celle du bas. D'après [K2] théorème 1.2, v^* définit un caractère χ de $Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}},0}$. On a un diagramme dual

$$\begin{array}{ccc} Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & & \\ & \searrow & \\ & & Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}},0} \\ & \nearrow & \\ Z(\hat{L}_{SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & & \end{array}$$

Le caractère $\chi_{K\tilde{G}}$ est composé de χ et de la flèche du haut tandis que $\chi_{K\tilde{L}}$ est composé de χ et de la flèche du bas. Cela nous ramène à prouver que, pour $\alpha \in \Delta^L$, les images dans $Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}},0}$ de $\varpi_\alpha^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ et de $\varpi_\alpha^{L,\Gamma_{\mathbb{R}}}$ sont égales. Ecrivons $\varpi_\alpha^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \in X_*(\hat{T}_{ad})$ sous la forme $\frac{1}{N}(x_* + y_*)$, où N est un entier strictement positif, $x_* \in X_*(Z(\hat{L}_{sc})^0)$ et $y_* \in X_*(\hat{T}^L_{sc})$. Ici $\hat{T}^L_{sc}$ est l'image réciproque de $\hat{T}$ dans $\hat{L}_{SC}$. Le groupe $X_*(\hat{T}^L_{sc})$ est engendré par les éléments de Δ^L (un élément $\beta \in \Delta$ étant identifié à la coracine associée à $\hat{\beta} \in \hat{\Delta}$). Il résulte des définitions que $\varpi_\alpha^{L,\Gamma_{\mathbb{R}}} = \frac{1}{N} y_*$ et que x_* est invariant par $\Gamma_{\mathbb{R}}$. Par définition, l'élément de $Z(\hat{G}_{SC})$ correspondant à $\varpi_\alpha^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ est $x_*(\zeta)y_*(\zeta)$, où $\zeta = e^{2\pi i/N}$ tandis que l'élément de $Z(\hat{L}_{SC})$ correspondant à $\varpi_\alpha^{L,\Gamma_{\mathbb{R}}}$ est $y^*(\zeta)$. Quand on pousse ces éléments dans $Z(\hat{L}_{sc})$, ces deux éléments diffèrent par $x_*(\zeta)$, qui appartient à $Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_{\mathbb{R}},0}$. Cela prouve (2) et (1).

On suppose désormais que $K\tilde{G}$ n'a pas d'autre espace de Levi que lui-même. Remarquons qu'il revient au même de supposer que, pour chaque composante $\tilde{G}$, le groupe G lui-même n'a pas de groupe de Levi propre. On a vu en effet qu'un groupe de Levi minimal donnait naissance à un espace de Levi. Remarquons aussi que, sous notre hypothèse, la propriété à prouver est l'égalité $\Delta_{min} = \Delta$.

Montrons maintenant que l'on peut supposer que G est simplement connexe. En effet, fixons une composante $\tilde{G}$ de $K\tilde{G}$ et un élément $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. L'automorphisme ad_γ se relève en un automorphisme de G_{SC}. On peut introduire un espace tordu $\tilde{G}_{SC}$ sur G_{SC}, que l'on note formellement $G_{SC}\gamma_{sc}$, de la façon suivante. La multiplication à gauche est évidente. Celle de droite est définie par $g_{sc}\gamma_{sc}x_{sc} = g_{sc}ad_\gamma(x_{sc})\gamma_{sc}$. Enfin l'action galoisienne est $\sigma(g_{sc}\gamma_{sc}) = \sigma(g_{sc})\gamma_{sc}$. L'application $\tilde{G}_{SC} \to \tilde{G}$ définie par $g_{sc}\gamma_{sc} \mapsto \pi(g_{sc})\gamma$ est un homomorphisme d'espaces tordus en un sens évident. On peut compléter $\tilde{G}_{SC}$ en un K-espace $K\tilde{G}_{SC}$ et on vérifie que l'application précédente s'étend en un homomorphisme $K\tilde{G}_{SC} \to K\tilde{G}$ (remarquons toutefois que l'application qui s'en déduit entre les ensembles de composantes connexes de ces espaces n'est en général ni injective, ni surjective). Il est clair que l'hypothèse sur $K\tilde{G}$ est aussi vérifiée pour $K\tilde{G}_{SC}$: G_{SC} et les autres groupes de $K\tilde{G}_{SC}$ n'ont pas d'autres groupes de Levi qu'eux-mêmes. L'ensemble Δ_{min} ne change pas puisque n'interviennent dans sa définition que les groupes $\hat{G}_{SC}$ et $\hat{G}_{AD}$ qui n'ont pas changé. Si on suppose démontrée l'assertion pour $K\tilde{G}_{SC}$, on conclut $\Delta_{min} = \Delta$, ce qui est la même assertion que pour $K\tilde{G}$.

On suppose désormais que G est simplement connexe. On conserve toutefois la notation G_{SC} quand elle est plus suggestive. On fixe une composante $\tilde{G}$ de $K\tilde{G}$ et un élément

$\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ fortement régulier. On choisit une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ de $G = G_{SC}$ dont le tore sous-jacent $T = T_{sc}$ est conservé par ad_γ. On utilise cette paire de Borel épinglée dans les constructions du paragraphe précédent. Le tore est défini sur $\mathbb{R}$ pour l'action naturelle comme pour l'action quasi-déployée. Il en résulte que $u^*(\sigma)$ normalise T_{sc} pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$. Nécessairement, son image $w(\sigma)$ dans le groupe de Weyl W est invariante par θ^*. L'hypothèse que G n'a pas d'espace de Levi propre entraîne que $T = T_{sc}$ est elliptique. En notant $\boldsymbol{\sigma}$ l'unique élément non trivial de $\Gamma_{\mathbb{R}}$, $w(\boldsymbol{\sigma}) \circ \boldsymbol{\sigma}_{G^*}$ agit donc par -1 sur $X_*(T_{sc})$. Il en résulte que $w(\boldsymbol{\sigma})$ envoie toute racine positive sur une racine négative. C'est donc l'élément de W de plus grande longueur, que l'on note $\mathbf{w}$. Introduisons la section de Springer $n : W \to G_{SC}$, cf. [LS] 2.1. A ce point, on a prouvé que l'on pouvait supposer supposer

$$u^*(1) = 1,\ u^*(\boldsymbol{\sigma}) = tn(\mathbf{w}),$$

pour un élément $t \in T_{sc}$. Soit $\alpha \in \Delta$. On dispose déjà de l'élément E_α de l'épinglage. On introduit l'élément $E_{-\alpha}$ de l'espace radiciel de $\mathfrak{g}$ associé à $-\alpha$, normalisé de sorte que $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \check{\alpha}$, en identifiant la coracine $\check{\alpha}$ à un élément de $\mathfrak{t}$. Notons G_α le sous-groupe de G engendré par T et les sous-groupes radiciels associés à α et $-\alpha$. Puisque l'action galoisienne naturelle échange α et $-\alpha$, ce groupe est défini sur $\mathbb{R}$. Puisque G est semi-simple et n'a pas de Levi propre, $G(\mathbb{R})$ est compact, donc aussi $G_\alpha(\mathbb{R})$. Comme on le sait ([S2] paragraphe 2), cela implique qu'il existe des éléments $c_\alpha, c_{-\alpha} \in \mathbb{C}^\times$ tels que $[c_{-\alpha}E_\alpha, c_\alpha E_\alpha] = \check{\alpha}$ et $\boldsymbol{\sigma}_G(c_\alpha E_\alpha) = -c_{-\alpha}E_{-\alpha}$. La première relation dit que $c_{-\alpha} = c_\alpha^{-1}$.

Montrons que l'on a

$$(3) \qquad ad_{n(\mathbf{w})} \circ \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(E_\alpha) = -E_{-\alpha}.$$

On a $ad_{n(\mathbf{w})} \circ \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\check{\alpha}) = -\check{\alpha}$ et il existe des nombres complexes non nuls x et y de sorte que $ad_{n(\mathbf{w})} \circ \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(E_\alpha) = xE_{-\alpha}$, $ad_{n(\mathbf{w})} \circ \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(E_{-\alpha}) = yE_\alpha$. Ces trois relations entraînent $xy = 1$. Notons s_α la symétrie relative à α. Par définition,

$$n(s_\alpha) = exp(X_\alpha)exp(-X_{-\alpha})exp(X_\alpha).$$

Un calcul matriciel entraîne l'égalité $n(\mathbf{w})\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(n(s_\alpha))n(\mathbf{w})^{-1} = \check{\alpha}(-x^{-1})n(s_\alpha)$. Mais le lemme 2.1.A de [LS] entraîne $n(\mathbf{w})n(s_\alpha)n(\mathbf{w})^{-1} = n(s_\alpha)$. D'où $\check{\alpha}(-x^{-1}) = 1$ et $x = -1$ puisque notre groupe est simplement connexe. Cela prouve (3).

Il résulte de (3) que $\boldsymbol{\sigma}_G(c_\alpha E_\alpha) = -\alpha(t)^{-1}\overline{c_\alpha}E_{-\alpha} = -\alpha(t)^{-1}(c_\alpha\overline{c_\alpha})c_{-\alpha}E_{-\alpha}$. La condition de compacité nous dit donc que $\alpha(t)$ est un réel positif, et cela pour tout $\alpha \in \Delta$. Cette propriété implique que l'on peut trouver un élément $t' = \prod_{\alpha\in\Delta}\check{\alpha}(t_\alpha)$, avec des t_α réels positifs, tel que $(t')^2$ a même image que t dans T_{ad}. Notons que $\boldsymbol{\sigma}_G(t') = (t')^{-1}$. Donc $t = \zeta t'\boldsymbol{\sigma}_G(t')^{-1}$, avec $\zeta \in Z(G) = Z(G_{SC})$. Alors

$$u^*(\boldsymbol{\sigma}) = \zeta t'\boldsymbol{\sigma}_G(t')^{-1}n(\mathbf{w}) = \zeta t'n(\mathbf{w})\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(t')^{-1}.$$

En remplaçant $\mathcal{E}$ par $ad_{t'}^{-1}(\mathcal{E})$, on fait disparaître le cobord et on obtient

$$u^*(\boldsymbol{\sigma}) = \zeta n(\mathbf{w}),$$

avec $\zeta \in Z(G_{SC})$. Mais on peut toujours multiplier notre cochaîne par une cochaîne à valeurs dans $Z(G_{SC})$. Cela nous ramène au cas où

$$u^*(1) = 1,\ u^*(\boldsymbol{\sigma}) = n(\mathbf{w}).$$

Calculons le cobord du^*. On a $du^*(1,1) = du^*(\boldsymbol{\sigma},1) = du^*(1,\boldsymbol{\sigma}) = 1$ et $du^*(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}) = n(\mathbf{w})\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(n(\mathbf{w}))$. L'élément $\mathbf{w}$ est invariant par l'action galoisienne et n est équivariant pour cette action. Donc $\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(n(\mathbf{w})) = n(\mathbf{w})$. En appliquant de nouveau le lemme 2.1.A de [LS], on obtient

$$du^*(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}) = \prod_{\alpha>0} \check{\alpha}(-1),$$

où le produit est pris sur toutes les racines de T dans G qui sont positives pour B. Il est d'usage de noter $2\check{\rho}$ la somme $\sum_{\alpha>0}\check{\alpha}$. On prendra garde à cette notation : $\check{\rho}$ n'est pas forcément une somme de coracines à coefficients entiers, mais seulement à coefficients demi-entiers. En tout cas, $\check{\rho}$ appartient à $X_*(T_{ad})$ car on sait que $<\alpha,\check{\rho}>=1$ pour tout $\alpha\in\Delta$. On peut écrire de façon unique $2\check{\rho}$ comme somme d'un élément de $2X_*(T_{sc})$ et d'un élément

$$\check{\epsilon} = \sum_{\alpha\in\Delta} \epsilon_\alpha\check{\alpha},$$

avec des coefficients ϵ_α égaux à 0 ou 1. On obtient $du^*(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}) = (2\check{\rho})(-1) = \check{\epsilon}(-1)$.

Rappelons comment on identifie un élément de $H^2(\Gamma_{\mathbb{R}}; Z(G_{SC}))$ à un caractère de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Tout d'abord, fixons un entier $N\geq 1$ tel que $NX_*(T_{ad})\subset X_*(T_{sc})$ et une racine primitive d'ordre N de l'unité $\zeta\in\mathbb{C}^\times$. L'application $x_*\mapsto (Nx_*)(\zeta)$ définie sur $X_*(T_{ad})$ se quotiente en un isomorphisme

$$X_*(T_{ad})/X_*(T_{sc}) \simeq Z(G_{SC}).$$

Il n'est pas équivariant par l'action galoisienne : puisque $\boldsymbol{\sigma}(\zeta) = \zeta^{-1}$, l'isomorphisme transporte l'action de $\boldsymbol{\sigma}$ en l'opposé de cette action. Un élément de $H^2(\Gamma_{\mathbb{R}}; Z(G_{SC}))$ peut toujours se représenter par une cochaîne v vérifiant comme ci-dessus $v(1,1) = v(1,\boldsymbol{\sigma}) = v(\boldsymbol{\sigma},1) = 1$. L'élément $\mathbf{v} = v(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma})$ vérifie $\mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = 1$ (par la condition de cocycle) et s'identifie donc à un élément $x\in X_*(T_{ad})/X_*(T_{sc})$ tel que $x\boldsymbol{\sigma}(x) = 1$. On voit que x est uniquement déterminé par la classe de v modulo un élément de la forme $y\boldsymbol{\sigma}(y)^{-1}$. Puisque $X_*(T_{ad})$ est le dual de $X_*(\hat{T}_{sc})$ et $X_*(T_{sc})$ est le dual de $X_*(\hat{T}_{ad})$, les deux groupes $X_*(T_{ad})/X_*(T_{sc})$ et $X_*(\hat{T}_{ad})/X_*(\hat{T}_{sc}) \simeq Z(\hat{G}_{SC})$ sont duaux. Donc x définit un caractère de $Z(\hat{G}_{SC})$. La restriction de ce caractère au sous-groupe $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ ne change pas si on multiplie x par un élément de la forme $y\boldsymbol{\sigma}(y)^{-1}$. Cette restriction ne dépend donc que de v. C'est le caractère associé à v.

Appliquée à du^*, cette construction nous dit que le caractère $\chi_{K\tilde{G}}$ s'identifie au caractère de $X_*(\hat{T}_{ad})/X_*(\hat{T}_{sc})$ associé à l'élément $\check{\rho}\in X_*(T_{ad})$. Par définition, l'ensemble Δ_{min} est alors la réunion de

- l'ensemble des $\alpha\in\Delta$ tels que $\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\alpha) = \alpha$ et $<\varpi_\alpha,\check{\rho}>\not\in\mathbb{Z}$;
- l'ensemble des $\alpha\in\Delta$ tels que $\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\alpha)\neq\alpha$ et $<\varpi_\alpha,\check{\rho}> + <\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\varpi_\alpha),\check{\rho}>\not\in\mathbb{Z}$.

L'élément $\check{\rho}$ est invariant par l'action galoisienne et son produit avec tout élément ϖ_α appartient à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Le second ensemble ci-dessus est donc vide. D'autre part la condition $<\varpi_\alpha,\check{\rho}>\not\in\mathbb{Z}$ équivaut à $\epsilon_\alpha = 1$. On obtient que Δ_{min} est formé d'éléments fixes par l'action galoisienne et que l'on a une égalité

$$\check{\epsilon} = (\sum_{\alpha\in\Delta_{min}} \check{\alpha}) + (\sum_{\alpha\in\Delta'} \check{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\check{\alpha})),$$

où Δ' est un certain sous-ensemble de $\Delta - \Delta_{min}$ formé d'éléments α tels que $\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\alpha)\neq\alpha$. Remarquons que, puisque $\check{\rho}$ est invariant par θ^*, $\check{\epsilon}$ l'est aussi. Donc Δ_{min} l'est (ce qui était déjà évident) ainsi que l'ensemble $\Delta'\sqcup\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')$.

Reprenons les calculs effectués dans le paragraphe précédent. On peut écrire $\gamma = te$, avec $t \in T$ et $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$. Comme on l'a dit, on a pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$ une égalité

$$ad_{u(\sigma)} \circ \sigma_G(e) = z(\sigma)^{-1}e,$$

avec $z(\sigma) \in Z(G) = Z(G_{SC})$. Ou encore

$$\sigma_G(e) = z(\sigma)^{-1}ad_{u^*(\sigma)}(e) = z(\sigma)^{-1}u^*(\sigma)\theta^*(u^*(\sigma))^{-1}e.$$

Mais $\theta^*(u^*(\sigma)) = u^*(\sigma)$. La condition devient simplement $\sigma_G(e) = z(\sigma)^{-1}e$. Puisque $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, on a $\sigma_G(te) = te$, ou encore $\sigma_G(t) = z(\sigma)t$. Cela entraîne que l'image t_{ad} de t dans T_{ad} appartient à $T_{ad}(\mathbb{R})$. Mais T_{ad} est elliptique. Donc $T_{ad}(\mathbb{R})$ est connexe et l'application $\pi : T_{sc}(\mathbb{R}) \to T_{ad}(\mathbb{R})$ est surjective. On peut donc écrire $t = t_0\zeta$, avec $t_0 \in T_{sc}(\mathbb{R})$ et $\zeta \in Z(G_{SC})$. Alors $\zeta e = t_0^{-1}\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. Quitte à remplacer e par ζe, on a construit un élément $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ qui appartient à $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

Traduisons maintenant ce que l'on cherche. On veut trouver un cocycle $\nabla : \Gamma_{\mathbb{R}} \to G_{SC}$ tel que sa classe dans $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{SC})$ soit invariante par θ et tel que la condition suivante soit vérifiée. Introduisons un groupe G' sur $\mathbb{R}$ muni d'un isomorphisme $\phi : G' \to G$ de sorte que $\phi \circ \sigma(\phi)^{-1} = ad_{\nabla(\sigma)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$. Notons $P^* = M^*U^*$ le sous-groupe parabolique standard de G^* tel que l'ensemble de racines simples associé à M^* soit Δ_{min}. On veut que P^* se transfère à G'. Comme on l'a dit dans le paragraphe précédent, que ∇ soit un cocycle à valeurs dans G_{SC} revient à dire que $d(\nabla u^*) = du^*$. De plus, quand on remplace G par G', on remplace u^* par ∇u^*. La dernière condition ci-dessus signifie que l'image de ∇u^* dans G^*_{ad} est cohomologue à une cochaîne à valeurs dans M^*_{ad}. Traduisons la condition d'invariance par θ. On se rappelle que cette action θ est l'action ad_γ pour un élément $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. On peut choisir pour γ l'élément e fixé ci-dessus. Alors $\theta = \theta^*$ et la condition signifie qu'il existe $g \in G_{SC}$ tel que $\theta^*(\nabla(\sigma)) = g\nabla(\sigma)\sigma_G(g)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$. Puisque $u^*(\sigma)$ est fixe par θ^*, cette relation équivaut à

$$\theta^*(\nabla(\sigma)u^*(\sigma)) = g\nabla(\sigma)\sigma_G(g)^{-1}u^*(\sigma) = g\nabla(\sigma)u^*(\sigma)\sigma_{G^*}(g)^{-1}.$$

Supposons trouvé une cochaîne $v^* : \Gamma_{\mathbb{R}} \to M^*_{sc} = M^*$ telle que

(4) $dv^* = du^*$;

(5) il existe $t \in T_{sc}$ tel que $\theta^*(v^*(\sigma)) = tv^*(\sigma)\sigma_{G^*}(t)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$.

Alors le cocycle $\nabla = v^*(u^*)^{-1}$ répond à la question.

Pour construire v^*, on a besoin de quelques remarques préliminaires concernant les ensembles Δ_{min} et Δ'. Rappelons que $\Delta_{min} \sqcup \Delta' \sqcup \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')$ est l'ensemble des $\alpha \in \Delta$ tels que, quand on écrit $2\check{\rho} = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta$, le coefficient c_α soit impair. Or on sait calculer $2\check{\rho}$ pour chaque système de racines irréductible. On renvoie aux tables de Bourbaki ([Bour]). On s'aperçoit en consultant ces tables que $\Delta_{min} \sqcup \Delta' \sqcup \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')$ est formé de racines deux à deux orthogonales. Puisque de plus, $\boldsymbol{\sigma}_{G^*}$ fixe tout élément de Δ_{min}, il en résulte que M^*_{SC} est un produit de groupes $SL(2)$ indexés par les racines $\alpha \in \Delta_{min}$. Introduisons l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de M^*, que l'on note $\boldsymbol{\omega}$. C'est simplement le produit des symétries s_α associées aux $\alpha \in \Delta_{min}$ et on a $\boldsymbol{\omega}(\alpha) = -\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta_{min}$. Enfin, puisque $\Delta' \sqcup \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')$ est orthogonal à Δ_{min}, on a $\boldsymbol{\omega}(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta' \sqcup \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')$.

Introduisons l'élément

$$x = \prod_{\alpha \in \Delta'} \check{\alpha}(-1) \in T_{sc}.$$

D'efinissons la cochaîne v^* par $v^*(1) = 1$ et $v^*(\boldsymbol{\sigma}) = xn(\boldsymbol{\omega})$. Elle prend ses valeurs dans M^*_{sc}. On va montrer qu'elle vérifie les conditions (4) et (5).

On a

$$dv^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = xad_{n(\boldsymbol{\omega})} \circ \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(x)^{-1} n(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(n(\boldsymbol{\omega})).$$

On a $\sigma_{G^*}(x) = \prod_{\alpha \in \Delta'} \boldsymbol{\sigma}(\check{\alpha})(-1)$. On a vu plus haut que toutes les coracines intervenant ici sont fixes par $\boldsymbol{\omega}$. D'où

$$xad_{n(\boldsymbol{\omega})} \circ \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(x)^{-1} = \prod_{\alpha \in \Delta'} \check{\alpha}(-1) \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\check{\alpha})(-1).$$

On calcule $n(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(n(\boldsymbol{\omega}))$ comme on a calculé plus haut $n(\mathbf{w})\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(n(\mathbf{w}))$. Ce terme vaut $(2\check{\rho}^{M^*})(-1)$, où $2\check{\rho}^{M^*}$ est la somme des racines positives dans M^*. Puisque M^*_{SC} est un produit de groupes $SL(2)$, on a simplement $2\check{\rho}^{M^*} = \sum_{\alpha \in \Delta_{min}} \check{\alpha}$. Cela conduit à l'égalité

$$dv^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = \check{\epsilon}(-1),$$

autrement dit

$$dv^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = du^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}).$$

Cela vérifie la condition (4).

On a $x\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(x) = \prod_{\alpha \in \Delta' \sqcup \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')} \check{\alpha}(-1)$. Or l'ensemble $\Delta' \sqcup \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')$ est invariant par θ^*. Donc $x\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(x)$ est invariant par θ^*. Autrement dit, l'élément $y = \theta^*(x)x^{-1}$ vérifie $y\boldsymbol{\sigma}_{G^*}(y) = 1$. Considérons le sous-tore T'' de T_{sc} tel que $X_*(T'') = \Delta' \sqcup \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')$, muni de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$. C'est un tore induit donc $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T'') = 0$. L'application $1 \mapsto 1$, $\boldsymbol{\sigma} \mapsto y$ est un cocycle à valeurs dans ce tore, donc est un cobord. Il existe donc $t \in T''$ tel que $y = t\sigma_{G^*}(t)^{-1}$. Parce que $\boldsymbol{\omega}$ opère trivialement sur $\Delta' \sqcup \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(\Delta')$, $ad_{v^*(\boldsymbol{\sigma})}$ fixe T''. On a aussi bien $y = tad_{v^*(\boldsymbol{\sigma})} \circ \boldsymbol{\sigma}_{G^*}(t)^{-1}$. Autrement dit

$$\theta^*(x)x^{-1} = tv^*(\boldsymbol{\sigma})\sigma_{G^*}(t)^{-1}v^*(\boldsymbol{\sigma})^{-1},$$

ou encore

$$\theta^*(x)x^{-1}v^*(\boldsymbol{\sigma}) = tv^*(\boldsymbol{\sigma})\sigma_{G^*}(t)^{-1},$$

ou encore

$$\theta^*(x)n(\boldsymbol{\omega}) = tv^*(\boldsymbol{\sigma})\sigma_{G^*}(t)^{-1},$$

ou encore

$$\theta^*(v^*(\boldsymbol{\sigma})) = tv^*(\boldsymbol{\sigma})\sigma_{G^*}(t)^{-1},$$

puisque $n(\boldsymbol{\omega})$ est fixe par θ^*. La relation précédente équivaut à (5). Cela achève la démonstration. $\square$

4 Stabilité et image du transfert

4.1 Rappels sur la descente d'Harish-Chandra et la transformation de Fourier

Le corps F est de nouveau un corps local quelconque de caractéristique nulle. Dans les premiers paragraphes, on fixe des mesures de Haar pour se débarrasser des espaces de mesures.

Oublions pour un temps les espaces tordus, c'est-à-dire supposons $\tilde{G} = G$, mais conservons le caractère ω. Un certain nombre de définitions se descendent aux algèbres de Lie, par exemple les intégrales orbitales. On utilise pour ces algèbres des notations analogues à celles pour les groupes.

On introduit une transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans l'espace $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ relative à un bicaractère invariant par conjugaison par $G(F)$ (en appelant conjugaison l'action adjointe). Cette transformation de Fourier conserve le noyau de l'homomorphisme $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F), \omega)$, donc passe au quotient en une transformation $f \mapsto \hat{f}$ dans $I(\mathfrak{g}(F), \omega)$. D'autre part, pour tout Levi M de G, on a une égalité $(\hat{f})_{M,\omega} = (f_{M,\omega})\hat{}$. Cela entraîne que la transformation de Fourier conserve le sous-espace $C_{cusp}^\infty(\mathfrak{g}(F), \omega) \subset C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ des fonctions f telles que $f_{M,\omega} = 0$ dans $I(\mathfrak{m}(F), \omega)$ pour tout Levi propre M de G.

Les propriétés suivantes résultent d'une part de la conjecture de Howe (qui n'est plus une conjecture depuis longtemps), ou plutôt de sa variante concernant les intégrales orbitales tordues par ω, d'autre part de l'intégrabilité des transformées de Fourier d'intégrales orbitales.

Soit $\mathfrak{u}$ un ouvert de $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ dont l'adhérence contienne un voisinage de 0. Alors

(1) si F est non-archimédien, pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, il existe $f' \in C_c^\infty(\mathfrak{u})$ telle que les intégrales orbitales de f et de $\hat{f}'$ coïncident dans un voisinage de 0.

Notons $\mathfrak{g}(F)_{ell}$ le sous-ensemble des éléments semi-simples réguliers et elliptiques dans $\mathfrak{g}(F)$. Alors

(2) si F est non-archimédien, pour tout $f \in C_{cusp}^\infty(\mathfrak{g}(F), \omega)$, il existe $f' \in C_c^\infty(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}(F)_{ell})$ telle que les intégrales orbitales de f et de $\hat{f}'$ coïncident dans un voisinage de 0.

Supposons donné un groupe Ξ d'automorphismes de G, définis sur F et conservant le caractère ω. Supposons que l'image de Ξ dans le groupe d'automorphismes extérieurs de G soit finie. On peut supposer que le bicaractère utilisé pour définir la transformation de Fourier est invariant par Ξ. Alors la transformation de Fourier est équivariante pour l'action de Ξ. Dans les assertions précédentes, si l'on suppose que $\mathfrak{u}$ est invariant par Ξ et que l'image de f dans $I(\mathfrak{g}(F), \omega)$ est fixe par Ξ, on peut imposer qu'il en est de même de celle de f'.

Revenons au cas général (on ne suppose plus $\tilde{G} = G$). Soient $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$ et $\mathfrak{u}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$ vérifiant les deux conditions suivantes

- $\mathfrak{u}$ est invariant par conjugaison par $Z_G(\eta, F)$;

- si $X \in \mathfrak{u}$, alors sa partie semi-simple X_{ss} appartient à $\mathfrak{u}$.

On va énoncer des propriétés qui sont vraies pourvu que $\mathfrak{u}$ soit assez petit. En particulier, on suppose $\mathfrak{u}$ assez petit pour que l'exponentielle y soit définie. On pose $U_\eta = exp(\mathfrak{u}) \subset G_\eta(F)$. Notons $\tilde{U}$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F)$ qui sont conjugués par un élément de $G(F)$ à un élément de $U_\eta\eta$. C'est un ouvert de $\tilde{G}(F)$. Notons $I(\tilde{U}, \omega)$ l'image de $C_c^\infty(\tilde{U})$ dans $I(\tilde{G}(F), \omega)$, $I(U_\eta, \omega)$ celle de $C_c^\infty(U_\eta)$ dans $I(G_\eta(F), \omega)$ et $I(\mathfrak{u}, \omega)$ celle de $C_c^\infty(\mathfrak{u})$ dans $I(\mathfrak{g}_\eta(F), \omega)$. L'exponentielle établit un isomorphisme entre $I(U_\eta, \omega)$ et $I(\mathfrak{u}, \omega)$. Remarquons que le groupe $Z_G(\eta; F)$ agit naturellement sur $I(G_\eta(F), \omega)$ et $I(\mathfrak{g}_\eta(F), \omega)$. Définissons une correspondance entre $C_c^\infty(\tilde{U})$ et $C_c^\infty(U_\eta)$ par : $f \in C_c^\infty(\tilde{U})$ et $\phi \in C_c^\infty(U_\eta)$ se correspondent si et seulement si on a l'égalité $I^{\tilde{G}}(x\eta, \omega, f) = I^{G_\eta}(x, \omega, \phi)$ pour tout élément régulier $x \in U_\eta$ tel que $x\eta$ soit fortement régulier dans $\tilde{G}$ (il est sous-entendu que les mesures sur $G_{x\eta}(F) = (G_\eta)_x(F)$ qui interviennent dans la définition de ces intégrales orbitales sont les mêmes pour les deux intégrales). La théorie de la descente affirme que cette correspondance se quotiente en un isomorphisme

$$desc_\eta^{\tilde{G}} : I(\tilde{U},\omega) \to I(U_\eta,\omega)^{Z_G(\eta;F)},$$

où, selon l'usage, l'exposant $Z_G(\eta;F)$ désigne le sous-espace d'invariants par ce groupe. Via l'exponentielle, on peut aussi considérer que $desc_\eta^{\tilde{G}}$ prend ses valeurs dans $I(\mathfrak{u},\omega)^{Z_G(\eta,F)}$.

Supposons η elliptique. Alors le même résultat vaut pour les fonctions cuspidales. C'est-à-dire, définissons $C^\infty_{cusp}(\tilde{U}) = C^\infty_{cusp}(\tilde{G}(F)) \cap C_c^\infty(\tilde{U})$, notons $I_{cusp}(\tilde{U},\omega)$ son image dans $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$ et définissons de même $C^\infty_{cusp}(U_\eta)$ et $I_{cusp}(U_\eta,\omega)$. L'application précédente se restreint en un isomorphisme

$$desc_\eta^{\tilde{G}} : I_{cusp}(\tilde{U},\omega) \to I_{cusp}(U_\eta,\omega)^{Z_G(\eta;F)}.$$

4.2 Filtration de $I(\tilde{G}(F),\omega)$

L'espace $\tilde{G}$ et le corps F sont quelconques. Pour un entier $n \geq -1$, notons $\mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F),\omega)$ l'espace des $f \in I(\tilde{G}(F),\omega)$ tels que $f_{\tilde{M},\omega} = 0$ pour tout espace de Levi $\tilde{M}$ tel que $a_{\tilde{M}} > n$. C'est aussi l'espace des $f \in I(\tilde{G}(F),\omega)$ qui vérifient la condition

(1) pour tout $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$ tel que $dim(A_{G_\gamma}) > n$, on a $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) = 0$.

Ces espaces forment une filtration

$$\{0\} = \mathcal{F}^{a_{\tilde{G}}-1} I(\tilde{G}(F),\omega) \subset I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega) = \mathcal{F}^{a_{\tilde{G}}}(\tilde{G}(F),\omega) \subset \mathcal{F}^{a_{\tilde{G}}+1}(\tilde{G}(F),\omega) \subset ...$$

$$\subset I(\tilde{G}(F),\omega) = \mathcal{F}^{a_{\tilde{M}_0}}(\tilde{G}(F),\omega),$$

où $\tilde{M}_0$ est un espace de Levi minimal. On note $GrI(\tilde{G}(F),\omega)$ l'espace gradué associé à cette filtration. Fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{L}}$ des classes de conjugaison par $G(F)$ d'espaces de Levi de $\tilde{G}$. Notons $\underline{\mathcal{L}}^n$ le sous-ensemble des $\tilde{M} \in \underline{\mathcal{L}}$ tels que $a_{\tilde{M}} = n$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F),\omega) & \to & \oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n} I(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})} \\ f & \mapsto & (f_{\tilde{M},\omega})_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n} \end{array}$$

se quotiente en un homomorphisme injectif

$$Gr^n I(\tilde{G}(F),\omega) = \mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F),\omega)/\mathcal{F}^{n-1} I(\tilde{G}(F),\omega) \to \oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n} I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}.$$

Lemme. *Cet homomorphisme est bijectif.*

Preuve. Dans le cas où F est réel, l'assertion est prouvée par Bouaziz ([Boua], théorème 3.3.1) dans le cadre non tordu et par Renard ([R1] théorème 11.2) dans le cadre tordu mais pour $\omega = 1$. La preuve de Renard s'étend au cas ω quelconque. En effet, un argument de descente nous ramène à une question analogue pour l'algèbre de Lie. Introduisons le groupe $G_\natural = Z(G)^0 \times G_{SC}$ et l'espace $I(\mathfrak{g}_\natural(F))$ des intégrales orbitales relatives à ce groupe et à son caractère trivial. Il y a un homomorphisme $\pi_\natural : G_\natural(F) \to G(F)$ de conoyau fini et ω se factorise par ce conoyau. D'autre part, $G_\natural$ et G ont même algèbre de Lie. Le conoyau $G(F)/\pi_\natural(G_\natural(F))$ agit naturellement sur $I(\mathfrak{g}_\natural(F))$. Alors notre espace $I(\mathfrak{g}(F),\omega)$ d'intégrales orbitales tordues par ω s'identifie au sous-espace de $I(\mathfrak{g}_\natural(F))$ où ce conoyau agit par le caractère ω. Passer à un tel sous-espace est une opération à peu près triviale et tous les résultats voulus pour $I(\mathfrak{g}(F),\omega)$ se déduisent ainsi de ceux concernant $I(\mathfrak{g}_\natural(F))$.

Le cas où $F=\mathbb{C}$ se ramène au cas $F=\mathbb{R}$ en remplaçant les groupes et les espaces par leurs images par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$.

On suppose maintenant F non-archimédien. On doit prouver la surjectivité de l'homomorphisme. On va d'abord prouver un analogue partiel pour les algèbres de Lie. Supposons pour un moment que $\tilde{G}=G$. On a de même une filtration sur $I(\mathfrak{g}(F),\omega)$ et un homomorphisme injectif

$$Gr^nI(\mathfrak{g}(F),\omega)=\mathcal{F}^nI(\mathfrak{g}(F),\omega)/\mathcal{F}^{n-1}I(\mathfrak{g}(F),\omega)\to\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n}I_{cusp}(\mathfrak{m}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}.$$

Montrons que :

(2) pour tout élément $(f^{\mathfrak{m}})_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n}\in\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n}I_{cusp}(\mathfrak{m}(F),\omega)^{W(M)}$, il existe $\varphi\in\mathcal{F}^nI(\mathfrak{g}(F),\omega)$ tel que, pour tout $M\in\underline{\mathcal{L}}^n$, les intégrales orbitales de φ et de $f^{\mathfrak{m}}$ coïncident dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{m}(F)$.

On peut fixer $M\in\underline{\mathcal{L}}^n$ et supposer $f^{\mathfrak{m}'}=0$ pour tout $M'\in\underline{\mathcal{L}}^n$ différent de M. En fixant un bicaractère invariant par conjugaison de $\mathfrak{g}(F)$, on introduit une transformation de Fourier dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, cf. 4.1. On a de même des transformations de Fourier dans $C_c^\infty(\mathfrak{l}(F))$ pour tout Levi L de G. D'après 4.1(2), on peut fixer $f'\in C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$ telle que

- son support est formé d'éléments elliptiques dans $\mathfrak{m}(F)$ et réguliers dans $\mathfrak{g}(F)$;
- les intégrales orbitales de $f^{\mathfrak{m}}$ et de $\hat{f}'$ coïncident dans un voisinage de 0.

En remplaçant f' par la moyenne de ses conjugués par un ensemble de représentants de $W(M)$, on peut supposer l'image de f' dans $I(\mathfrak{m}(F),\omega)$ invariante par $W(M)$. Parce que le support de f' est formé d'éléments réguliers, on n'a aucun mal à trouver une fonction $\varphi'\in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telle que

- $\varphi'_{M,\omega}=f'$ dans $I(\mathfrak{m}(F),\omega)$;
- le support de φ' est un voisinage assez petit dans $\mathfrak{g}(F)$ de celui de f'.

Cette deuxième condition implique que le support de φ' est formé d'éléments réguliers dans $\mathfrak{g}(F)$ et conjugués par $G(F)$ à des éléments elliptiques de $\mathfrak{m}(F)$. Si M' est un Levi de G, un tel élément ne peut appartenir à $\mathfrak{m}'(F)$ que si M' contient un conjugué de M. A fortiori $\varphi'_{M',\omega}=0$ si M' ne vérifie pas cette condition

Posons $\varphi=\hat{\varphi}'$. On a $\varphi_{M,\omega}=\hat{f}'$, donc les intégrales orbitales de φ et de $f^{\mathfrak{m}}$ coïncident dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{m}(F)$. Soit M' un Levi de G qui vérifie soit $a_{M'}>n$, soit $a_{M'}=n$ et M' n'est pas conjugué à M. Alors $\varphi_{M',\omega}=(\varphi'_{M',\omega})\hat{}=0$. Cela entraîne que $\varphi\in\mathcal{F}^nI(\mathfrak{g}(F),\omega)$ et que $\varphi_{M',\omega}=0$ pour tout $M'\in\underline{\mathcal{L}}$ différent de M. Alors φ satisfait les conditions de (2).

Supposons de plus qu'un groupe Ξ agit sur G par automorphismes définis sur F en conservant le caractère ω. Supposons que l'image de Ξ dans le groupe d'automorphismes extérieurs de G est fini. Supposons les transformations de Fourier équivariantes pour cette action. L'action du groupe Ξ conserve la filtration $(\mathcal{F}^nI(\mathfrak{g}(F),\omega))_{n\in\mathbb{N}}$. Il agit naturellement sur l'espace $\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n}I_{cusp}(\mathfrak{m}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$ (un élément $\xi\in\Xi$ envoie le terme indexé par M sur celui indexé par l'unique élément de $\underline{\mathcal{L}}^n$ conjugué à $\xi(M)$). En prenant les invariants par Ξ, on obtient un homomorphisme

$$Gr^nI(\mathfrak{g}(F),\omega)^\Xi=\mathcal{F}^nI(\mathfrak{g}(F),\omega)^\Xi/\mathcal{F}^{n-1}I(\mathfrak{g}(F),\omega)^\Xi\to(\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}^n}I_{cusp}(\mathfrak{m}(F),\omega)^{W(\tilde{M})})^\Xi.$$

On peut aussi bien remplacer ici Ξ par son image finie dans le groupe des automorphismes de G quotienté par celui des automorphismes intérieurs définis par des éléments de $G(F)$.

En moyennant sur ce groupe fini, on obtient pour cet homomorphisme une assertion analogue à (2).

Revenons à l'assertion du lemme. Un argument familier de partition de l'unité nous ramène à prouver l'assertion suivante :

(3) soient $\tilde{M} \in \underline{\mathcal{L}}^n$, $f \in I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$ et $\eta \in \tilde{M}_{ss}(F)$; alors il existe $\varphi \in \mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F),\omega)$ tel que

- $\varphi_{\tilde{M}',\omega} = 0$ pour tout $\tilde{M}' \in \underline{\mathcal{L}}^n$ différent de $\tilde{M}$;

- les intégrales orbitales de f et φ coïncident dans un voisinage de η dans $\tilde{M}(F)$.

Fixons donc $\tilde{M} \in \underline{\mathcal{L}}^n$, $f \in I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$ et $\eta \in \tilde{M}_{ss}(F)$. Si η n'est pas elliptique dans $\tilde{M}$, les intégrales orbitales de f sont nulles au voisinage de η par cuspidalité de f et la fonction $\varphi = 0$ résout la question. On suppose maintenant η elliptique dans $\tilde{M}(F)$. Fixons un voisinage $\mathfrak{u}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$, ouvert et fermé et vérifiant les conditions de 4.1. Posons $\mathfrak{u}_M = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}_\eta(F)$. On déduit de $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}_M$ des ouverts $\tilde{U} \subset \tilde{G}(F)$ et $\tilde{U}_M \subset \tilde{M}(F)$. Posons $\mathcal{F}^n I(\tilde{U},\omega) = I(\tilde{U},\omega) \cap \mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F),\omega)$, $\mathcal{F}^n I(\mathfrak{u},F) = I(\mathfrak{u},\omega) \cap \mathcal{F}^n I(\mathfrak{g}_\eta(F),\omega)$. La descente nous fournit un isomorphisme $I(\tilde{U},\omega) \simeq I(\mathfrak{u},\omega)^{Z_G(\eta;F)}$. Celui-ci se restreint en un isomorphisme

$$(4) \qquad \mathcal{F}^n(\tilde{U},\omega) \simeq \mathcal{F}^n(\mathfrak{u},\omega)^{Z_G(\eta;F)}.$$

C'est clair en utilisant la caractérisation (1) des filtrations. Par ailleurs, la descente nous fournit un isomorphisme

$$I_{cusp}(\tilde{U}_M,\omega) \simeq I_{cusp}(\mathfrak{u}_M,\omega)^{Z_M(\eta;F)}.$$

Notons f_{loc} l'image par cet isomorphisme de la restriction de f à $\tilde{U}_M$. Soit $Norm(\tilde{M},\eta;F)$ l'intersection de $Z_G(\eta;F)$ avec le normalisateur de $\tilde{M}$ dans G. Ce groupe est égal au normalisateur de M_η dans $Z_G(\eta;F)$: un élément de $Z_G(\eta;F)$ normalise $\tilde{M}$ ou M_η si et seulement s'il normalise $A_{\tilde{M}} = A_{M_\eta}$. Parce que f est invariante par $W(\tilde{M})$, f_{loc} est invariante par $Norm(\tilde{M},\eta;F)$. Notons $\underline{\mathcal{L}}^n_\eta$ l'analogue de $\underline{\mathcal{L}}^n$ pour le groupe G_η. Pour $R \in \underline{\mathcal{L}}^n_\eta$, on définit un élément $f^{\mathfrak{r}} \in I_{cusp}(\mathfrak{l}(F),\omega)$ de la façon suivante. Si R n'est pas conjugué à M_η par un élément de $Z_G(\eta;F)$, on pose $f^{\mathfrak{r}} = 0$. Si R est conjugué à M_η par un élément de $Z_G(\eta;F)$, on fixe un tel élément x. L'automorphisme ad_x définit un isomorphisme de $I_{cusp}(\mathfrak{m}_\eta(F),\omega)$ sur $I_{cusp}(\mathfrak{r}(F),\omega)$ et $f^{\mathfrak{l}^\eta}$ est l'image de f_{loc} par cet isomormophisme. La propriété d'invariance ci-dessus montre que cette définition ne dépend pas du choix de x. La famille $(f^{\mathfrak{r}})_{R\in\underline{\mathcal{L}}^n_\eta}$ appartient à $\oplus_{R\in\underline{\mathcal{L}}^n_\eta} I_{cusp}(\mathfrak{r}(F),\omega)^{W^{G_\eta}(R)}$ et, par construction, elle est invariante par l'action de $Z_G(\eta;F)$. En appliquant l'assertion (2) renforcée comme on l'a expliqué ci-dessus, on choisit un élément $\varphi_{loc} \in \mathcal{F}^n I(\mathfrak{g}(F),\omega)^{Z_G(\eta;F)}$ satisfaisant la conclusion de (2). En utilisant (4), on relève φ_{loc} en un élément φ' de $\mathcal{F}^n(\tilde{U},\omega)$. Considérons un voisinage $\mathfrak{u}'$ de 0 dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$ vérifiant les mêmes conditions que $\mathfrak{u}$. On en déduit un voisinage $\tilde{U}'$ de η dans $\tilde{G}(F)$. Notons φ le produit de φ' et de la fonction caractéristique de $\tilde{U}'$. On va montrer que, si $\mathfrak{u}'$ est assez petit, φ vérifie (3). Cette fonction appartient à $\mathcal{F}^n(\tilde{U},\omega)$, cet espace étant évidemment stable par multiplication par la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert et fermé et invariant par conjugaison par $G(F)$. Pour $X \in \mathfrak{m}_\eta(F)$ assez proche de 0, on a

$$I^{\tilde{G}}(exp(X)\eta,\omega,\varphi) = I^{\tilde{G}}(exp(X)\eta,\omega,\varphi') = I^{G_\eta}(X,\omega,\varphi_{loc})$$

$$= I^{M_\eta}(X,\omega,f_{loc}) = I^{\tilde{M}}(exp(X)\eta,\omega,f),$$

ce qui est la dernière condition requise. Soient $\tilde{M}' \in \underline{\mathcal{L}}^n$ différent de $\tilde{M}$ et γ un élément $\tilde{G}$-régulier de $\tilde{M}'(F)$. On doit montrer que $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,\varphi) = 0$. C'est clair si $\gamma \notin \tilde{U}'$. Supposons

$\gamma \in \tilde{U}'$. On peut alors écrire $\gamma = g^{-1}exp(X)\eta g$, avec $g \in G(F)$ et $X \in \mathfrak{u}'$. Quitte à changer g, on peut conjuguer X par un élément de $G_\eta(F)$ et supposer X assez proche de 0. Posons $\tilde{M}'' = g\tilde{M}'g^{-1}$. Puisque $\gamma \in \tilde{M}'(F)$, on a $exp(X)\eta \in \tilde{M}''(F)$. Donc $A_{\tilde{M}''} \subset Z_G(exp(X)\eta)$. Pour X assez petit, ce commutant est inclus dans $Z_G(\eta)$. Alors $\eta \in \tilde{M}''(F)$, puis $X \in \mathfrak{m}''_\eta(F)$. On a comme ci-dessus

$$\omega(g)I^{\tilde{G}}(g^{-1}exp(X)\eta g, \omega, \varphi) = I^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, \omega, \varphi') = I^{G_\eta}(X, \omega, \varphi_{loc}) = I^{M''_\eta}(X, \omega, \varphi_{loc, M''_\eta, \omega}).$$

On a $A_{\tilde{M}''} \subset A_{M''_\eta}$. Si cette inclusion est stricte, $dim(A_{M''_\eta}) > n$ et les intégrales orbitales ci-dessus sont nulles puisque $\varphi_{loc} \in \mathcal{F}^n I(\mathfrak{g}_\eta(F), \omega)$. Si l'inclusion ci-dessus est une égalité, M''_η est conjugué par $G_\eta(F)$ à un élément de $\underline{\mathcal{L}}^n_\eta$ et il résulte de notre construction que les intégrales ci-dessus sont encore nulles sauf si M''_η est conjugué à M_η par un élément de $Z_G(\eta; F)$. Il reste à exclure cette possibilité. Mais, parce que l'on a à la fois $A_{\tilde{M}''} = A_{M''_\eta}$ et $A_{\tilde{M}} = A_{M_\eta}$, dire que M''_η et M_η sont conjugués par un élément de $Z_G(\eta; F)$ revient à dire que $\tilde{M}''$ et $\tilde{M}$ le sont. Puisque $\tilde{M}''$ et $\tilde{M}'$ sont conjugués par g, cela est exclu par notre hypothèse que $\tilde{M}'$ n'est conjugué à $\tilde{M}$ par aucun élément de $G(F)$. $\square$

4.3 Image de la restriction

Pour un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, on note $res_{\tilde{M}}$ l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(F), \omega) & \to & I(\tilde{M}(F), \omega) \\ f & \mapsto & f_{\tilde{M}, \omega}, \end{array}$$

ou sa variante envoyant $I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$ dans $I(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))$. Soit $(\tilde{M}_j)_{j=1,...,k}$ une famille finie d'espaces de Levi de $\tilde{G}$. Considérons l'application linéaire

$$res = \oplus_{j=1,...,k} res_{\tilde{M}_j} : I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F)) \to \oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(F), \omega) \otimes Mes(M_j(F)).$$

Lemme. *L'image de res est l'espace des $(\boldsymbol{\varphi}_j)_{j=1,...,k} \in \oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(F), \omega) \otimes Mes(M_j(F))$ qui vérifient les conditions équivalentes suivantes :*

(i) soient $j, j' \in \{1, ..., k\}$, $\gamma \in \tilde{M}_j(F)$ et $\gamma' \in \tilde{M}_{j'}(F)$ deux éléments $\tilde{G}$-réguliers et soit $g \in G(F)$ tel que $\gamma' = g\gamma g^{-1}$; munissons $G_\gamma(F)$ et $G_{\gamma'}(F)$ de mesures de Haar se correspondant par ad_g ; alors $I^{\tilde{M}_{j'}}(\gamma', \omega, \boldsymbol{\varphi}_{j'}) = \omega(g) I^{\tilde{M}_j}(\gamma, \omega, \boldsymbol{\varphi}_j)$;

(ii) soient $j, j' \in \{1, ..., k\}$, $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}_j$ et $\tilde{R}'$ un espace de Levi de $\tilde{M}_{j'}$ et soit $g \in G(F)$ tel que $\tilde{R}' = ad_g(\tilde{R})$; alors $\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{R}', \omega}$ est l'image de $\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{R}, \omega}$ par l'isomorphisme $I(\tilde{R}, \omega) \otimes Mes(R(F)) \to I(\tilde{R}', \omega) \otimes Mes(R'(F))$ déduit de ad_g.

Remarque. Dans (i), la donnée de γ et d'une mesure de Haar sur $G_\gamma(F)$ définit une intégrale orbitale qui est naturellement une forme linéaire sur $I(\tilde{M}_j(F), \omega) \otimes Mes(M_j(F))$.

Preuve. Pour simplifier les notations, on oublie les espaces de mesures. Il est clair que les deux conditions de l'énoncé sont équivalentes et qu'elles sont vérfiées sur les éléments de l'image de res. Posons

$$I = \oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(F), \omega)$$

et, pour tout n,

$$\mathcal{F}^n I = \oplus_{j=1,...,k} \mathcal{F}^n I(\tilde{M}_j(F), \omega).$$

Notons J le sous-espace des $(\varphi_j)_{j=1,\dots,k} \in I$ satisfaisant les conditions (i) ou (ii). Il est clair que res envoie $\mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F),\omega)$ dans $\mathcal{F}^n I$, donc aussi dans $J \cap \mathcal{F}^n I$. Donc res définit une application

$$(1) \qquad Gr^n I(\tilde{G}(F),\omega) \to (J \cap \mathcal{F}^n I)/(J \cap \mathcal{F}^{n-1} I).$$

On va montrer qu'elle est surjective. L'espace de départ est isomorphe à

$$(2) \qquad \oplus_{\tilde{L}\in\underline{\mathcal{L}}^n} I_{cusp}(\tilde{L}(F),\omega)^{W(\tilde{L})}$$

tandis que l'espace d'arrivée est inclus dans

$$(3) \qquad Gr^n I \simeq \oplus_{j=1,\dots,k} \oplus_{\tilde{R}\in\underline{\mathcal{L}}^{\tilde{M}_j,n}} I_{cusp}(\tilde{R}(F),\omega)^{W^{M_j}(\tilde{R})}.$$

L'image dans l'espace (2) de $(J \cap \mathcal{F}^n I)/(J \cap \mathcal{F}^{n-1} I)$ est contenu dans le sous-espace des éléments vérifiant la condition (ii) restreinte aux espaces de Levi $\tilde{R} \in \underline{\mathcal{L}}^{\tilde{M}_j,n}$ et $\tilde{R}' \in \underline{\mathcal{L}}^{\tilde{M}_{j'},n}$. Pour un élément $(\varphi_j^{\tilde{R}})_{j=1,\dots k,\tilde{R}\in\underline{\mathcal{L}}^{\tilde{M}_j,n}}$ vérifiant cette condition, on définit un élément $(f^{\tilde{L}})_{\tilde{L}\in\underline{\mathcal{L}}^n}$ de l'espace (2) de la façon suivante. Soit $\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n$. S'il n'existe pas de $j \in \{1,\dots,k\}$ et de $\tilde{R} \in \underline{\mathcal{L}}^{\tilde{M}_j,n}$ tel suq $\tilde{L}$ soit conjugué à $\tilde{R}$ par un élément de $G(F)$, on pose $f^{\tilde{L}} = 0$. Si au contraire il existe un tel couple $(j,\tilde{R})$, on en fixe un et on choisit un élément g tel que $ad_g(\tilde{R}) = \tilde{L}$. Alors $f^{\tilde{L}}$ est l'image de $\varphi^{\tilde{R}}$ par l'isomorphisme déduit de ad_g. La condition (ii) entraîne que cela ne dépend pas des choix et que la fonction $f^{\tilde{L}}$ est bien invariante par $W(\tilde{L})$. Il est clair que $(\varphi_j^{\tilde{R}})_{j=1,\dots,k,\tilde{R}\in\underline{\mathcal{L}}^{\tilde{M}_j,n}}$ est l'image de $(f^{\tilde{L}})_{\tilde{L}\in\underline{\mathcal{L}}^n}$ par la composée de l'application (1) et de l'inclusion de son espace d'arrivée dans l'espace (3). Cela démontre la surjectivité de l'application (1)

Par récurrence sur n, on en déduit que l'application

$$res : \mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F),\omega) \to J \cap \mathcal{F}^n I$$

est surjective. Pour n grand, cela signifie que J est bien l'image de l'application res. $\square$

4.4 Conjugaison stable

On a déjà rappelé la notion de conjugaison stable pour les éléments de $\tilde{G}_{reg}(F)$: deux éléments de cet ensemble sont stablement conjugués si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de $G = G(\bar{F})$. Pour un élément $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$, on note $I_\eta = G_\eta Z(G)^\theta$ et on pose

$$\mathcal{Y}(\eta) = \{y \in G; \forall\sigma \in \Gamma_F, y\sigma(y)^{-1} \in I_\eta\}.$$

Pour deux éléments $\eta,\eta' \in \tilde{G}_{ss}(F)$, on appelle diagramme joignant η et η' un sextuplet (η,B,T,B',T',η') tel que

(1) (B,T) et (B',T') sont des paires de Borel de G ;

(2) ad_η conserve (B,T) et $ad_{\eta'}$ conserve (B',T') ;

(3) T et T' sont définis sur F et l'isomorphisme $\xi_{T,T'} : T \to T'$ issu des deux paires est équivariant pour les actions galoisiennes ;

complétons les deux paires en des paires de Borel épinglées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, écrivons $\eta = te$, avec $t \in T$ et $e \in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ et écrivons de même $\eta' = t'e'$; on impose que e et e' aient même image dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$; alors

(4) $\xi_{T,T'}(t) \in t'(1-\theta')(T')$, où θ' est l'automorphisme de T' déterminé par $\mathcal{E}'$.

On voit que la condition (4) ne dépend pas des choix auxiliaires.

Dans le cas où η et η' sont fortement réguliers, on montre comme au lemme 1.10(i) qu'il existe un diagramme joignant η et η' si et seulement si ces deux éléments sont stablement conjugués. En général, considérons les conditions suivantes :

(st1) il existe $y \in \mathcal{Y}(\eta)$ tel que $\eta' = y^{-1}\eta y$;

(st2) il existe un diagramme $(\eta, B, T, B', T', \eta')$;

(st3) il existe un diagramme $(\eta, B, T, B', T', \eta')$ tel que

(st3)(a) si F est non archimédien, $T^{\theta,0}$ est elliptique dans G_η (c'est-à-dire $T^{\theta,0}/Z(G_\eta)$ ne contient pas de sous-tore déployé non trivial) et $(T')^{\theta',0}$ est elliptique dans $G_{\eta'}$;

(st3)(b) si F est réel, $T^{\theta,0}$ est fondamental dans G_η et $(T')^{\theta',0}$ est fondamental dans $G_{\eta'}$;

(st4) (η, η') appartient à l'adhérence dans $\tilde{G}(F) \times \tilde{G}(F)$ de l'ensemble des couples $(\gamma, \gamma') \in \tilde{G}_{reg}(F) \times \tilde{G}_{reg}(F)$ tels que γ et γ' sont stablement conjugués.

Lemme . *Les conditions (st1) à (st4) ci-dessus sont équivalentes.*

Preuve. La même preuve qu'au lemme 1.10(ii) montre l'équivalence de (st2) et (st4).

Supposons (st2) vérifiée et fixons un diagramme $(\eta, B, T, B', T', \eta')$. On complète les paires de Borel en des paires épinglées et on écrit η et η' comme en (4). Soit $x \in G$ tel que ad_x envoie $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$. Les éléments e et $ad_x(e)$ ont par définition même image dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. L'hypothèse de (4) est que e' et e ont même image dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. Cela signifie que, quitte à multiplier x par un élément de $Z(G)$, on peut supposer $ad_x(e) = e'$. L'isomorphisme $\xi_{T,T'}$ n'est autre que la restriction à T de ad_x. D'après (4), on peut donc écrire $ad_x(t) = t'(1-\theta')(t'')$, avec un $t'' \in T'$. Alors $x\eta x^{-1} = t''\eta'(t'')^{-1}$. Posons $y = x^{-1}t''$. On a $y^{-1}\eta y = \eta'$. L'isomorphisme $\xi_{T,T'}$ est encore la restriction de ad_y. Puisqu'il est défini sur F, $y\sigma(y)^{-1}$ commute à T, donc appartient à T, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. L'égalité $y^{-1}\eta y = \eta'$ et le fait que η et η' appartiennent à $\tilde{G}(F)$ entraînent que $y\sigma(y)^{-1}$ appartient aussi à $Z_G(\eta)$. Or $T \cap Z_G(\eta) \subset I_\eta$ ([W1] 3.1(1)). Donc $y \in \mathcal{Y}(\eta)$ et (st1) est vérifiée.

Supposons (st1) vérifiée, fixons $y \in \mathcal{Y}(\eta)$ tel que $y^{-1}\eta y = \eta'$. Fixons, ainsi qu'il est loisible, une paire de Borel (B, T) conservée par ad_η, telle que T soit défini sur F et $T^{\theta,0}$ soit elliptique dans G_η si F est non archimédien, ou fondamental si $F = \mathbb{R}$. L'automorphisme $ad_{y^{-1}}$ envoie G_η sur $G_{\eta'}$ et l'hypothèse que y appartient à $\mathcal{Y}(\eta)$ entraîne que sa restriction à G_η est un torseur intérieur entre ces deux groupes. On sait qu'un tore elliptique, ou fondamental, se transfère à toute forme intérieure (et son transfert est encore elliptique ou fondamental). Quitte à multiplier y à droite par un élément de $G_{\eta'}$, on peut donc supposer que $ad_{y^{-1}}(T^{\theta,0})$ est défini sur F et que la restriction de $ad_{y^{-1}} : T^{\theta,0} \to ad_{y^{-1}}(T^{\theta,0})$ est défini sur F. Posons $B' = ad_{y^{-1}}(B)$, $T' = ad_{y^{-1}}(T)$. Puisque T est le commutant de $T^{\theta,0}$, les propriétés précédentes impliquent que T est défini sur F et que $ad_{y^{-1}} : T \to T'$ l'est aussi. Evidemment, $ad_{\eta'}$ conserve (B', T'). On complète nos paires en des paires épinglées et on écrit η et η' comme en (4). Soit $x \in G$ qui envoie $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{E}$. Comme ci-dessus, on peut imposer que $ad_x(e') = e$. Puisque $ad_{y^{-1}}$ et $ad_{x^{-1}}$ envoient tous deux (B, T) sur (B', T'), on peut écrire $y = xt''$, avec un $t'' \in T'$. L'égalité $ad_{y^{-1}}(\eta) = \eta'$ entraîne que $ad_{x^{-1}}(t) = t'(1-\theta')(t'')$. Puisque $\xi_{T,T'}$ est la restriction de $ad_{x^{-1}}$ à T, on obtient (4). Donc $(\eta, B, T, B', T', \eta')$ est un diagramme vérifiant les conditions supplémentaires de (st3).

Enfin, (st3) implique évidemment (st2). $\square$

Définition. *On dit que η et η' sont stablement conjugués si et seulement si les conditions (st1),...,(st4) sont vérifiées.*

4.5 Conjugaison stable et application $N^{\tilde{G}}$

Lemme . *Soient η, η' deux éléments stablement conjugués de $\tilde{G}_{ss}(F)$. Alors on a l'égalité $N^{\tilde{G}}(\eta) = N^{\tilde{G}}(\eta')$ dans $\tilde{G}_{0,ab}(F)$.*

Preuve. On fixe une paire de Borel $\mathcal{E}$, on écrit $\eta = \pi(x)e$, avec $x \in G_{SC}$ et $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$. On pose $\theta = ad_e$. L'élément $N^{\tilde{G}}(\eta)$ est l'image dans $\tilde{G}_{0,ab}(F)$ du cocycle $(\bar{\nu}, \bar{e}) \in Z^{1,0}(\Gamma_F; \mathcal{Z}(G_{SC}) \circlearrowleft \mathcal{Z}(\tilde{G}))$, où $\nu(\sigma) = \theta(u_{\mathcal{E}}(\sigma))x^{-1}\sigma(x)u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$ (les$^-$désignent les images dans $\mathcal{Z}(G_{SC})$ ou $\mathcal{Z}(\tilde{G})$). Soit $y \in \mathcal{Y}(\eta)$ tel que $\eta' = y^{-1}\eta y$. Ecrivons $y = z\pi(v)$, avec $z \in Z(G)$ et $v \in G_{SC}$. Alors $\eta' = \pi(x')e'$, avec $x' = v^{-1}x\theta(v)$, $e' = z^{-1}\theta(z)e$. L'élément $N^{\tilde{G}}(\eta')$ est l'image du cocycle $(\bar{\nu}', \bar{e}')$, où

$$\nu'(\sigma) = \theta(u_{\mathcal{E}}(\sigma))\theta(v)^{-1}x^{-1}v\sigma(v)^{-1}\sigma(x)\sigma(\theta(v))u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}.$$

Introduisons l'action quasi-déployée $\sigma \mapsto \sigma_{G^*} = ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)} \circ \sigma$ qui préserve $\mathcal{E}$. Puisque $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$, $\theta = ad_e$ est fixe pour cette action. Donc

$$u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(\theta(v))u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1} = \theta(u_{\mathcal{E}}(\sigma))\theta(\sigma(v))\theta(u_{\mathcal{E}}(\sigma))^{-1}.$$

Puisque ν' est à valeurs centrales, on peut aussi bien conjuguer $\nu'(\sigma)$ par cette expression et on obtient

$$\nu'(\sigma) = \theta(u_{\mathcal{E}}(\sigma)\theta(\sigma(v)v^{-1})x^{-1}v\sigma(v)^{-1}\sigma(x)u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}.$$

L'hypothèse $y \in \mathcal{Y}(\eta)$ entraîne que $\pi(v\sigma(v)^{-1}) \in Z(G)G_\eta$, a fortiori $v_{ad}\sigma(v_{ad})^{-1} \in G_{AD,\eta}$. Mais $G_{SC,\eta}$ s'envoie surjectivement sur $G_{AD,\eta}$. Donc $v\sigma(v)^{-1} \in Z(G_{SC})G_{SC,\eta}$. Ecrivons $v\sigma(v)^{-1} = \zeta(\sigma)g(\sigma)$, avec $\zeta(\sigma) \in Z(G_{SC})$ et $g(\sigma) \in G_{SC,\eta}$. Cette dernière relation signifie que $x\theta(g(\sigma))x^{-1} = g(\sigma)$. On calcule alors

$$\nu'(\sigma) = \theta(\zeta(\sigma))^{-1}\zeta(\sigma)\nu(\sigma).$$

Donc $\bar{\nu}' = \bar{\nu}$. On a aussi $\bar{e}' = \bar{e}$ et le lemme s'ensuit. $\square$

4.6 Description locale des classes de conjugaison stable

Pour $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$, fixons un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ de l'ensemble de doubles classes $I_\eta \backslash \mathcal{Y}(\eta)/G(F)$. L'application qui à $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ associe la classe de conjugaison par $G(F)$ de $\eta[y] = y^{-1}\eta y$ est une surjection de $\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ sur l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ contenues dans la classe de conjugaison stable de η. En général, elle n'est pas injective. C'est toutefois le cas si η est fortement régulier.

Soit $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$. Fixons une forme quasi-déployée $\bar{G}$ de G_η. On peut, si on veut, fixer un torseur intérieur entre ces deux groupes. Nous préférons dire que nous fixons une identification entre <u>la</u> paire de Borel épinglée de $\bar{G}$ et celle de G_η. Pour tout $y \in \mathcal{Y}(\eta)$, l'automorphisme $ad_{y^{-1}}$ permet d'identifier <u>la</u> paire de Borel épinglée de G_η et celle de $G_{\eta[y]}$, d'où une identification de cette dernière avec celle de $\bar{G}$. Il y a donc une correspondance entre classes de conjugaison stable semi-simples dans $G_{\eta[y]}(F)$ et classes de conjugaison stable semi-simples dans $\bar{G}(F)$. D'autre part, les groupes $Z_G(\eta[y])/I_{\eta[y]}$ s'identifient de façon équivariante pour les actions. On note Ξ ce groupe commun. On le fait agir sur $\bar{G}$ de sorte que cette action conserve une paire de Borel épinglée définie sur F fixée. Cette action est fidèle (seul l'élément neutre de Ξ agit par l'identité). Les actions galoisiennes sur Ξ et $\bar{G}$ sont compatibles. En particulier, Ξ^{Γ_F} agit par automorphismes définis sur F.

Fixons un ouvert $\bar{\mathfrak{u}}$ de $\bar{\mathfrak{g}}(F)$ contenant 0, tel que

- $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{u}}$ si et seulement si $\bar{X}_{ss} \in \bar{\mathfrak{u}}$, où $\bar{X}_{ss}$ est la partie semi-simple de $\bar{X}$;
- si $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{u}}$ et $\bar{X}' \in \bar{\mathfrak{g}}(F)$ sont conjugués par un élément de $\bar{G}(\bar{F})$, alors $\bar{X}' \in \bar{\mathfrak{u}}$;
- $\bar{\mathfrak{u}}$ est invariant par Ξ^{Γ_F}.

Pour tout y, il lui correspond un tel voisinage $\mathfrak{u}_{\eta[y]} \subset \mathfrak{g}_{\eta[y]}(F)$, formé des X tels que la classe de conjugaison stable de X_{ss} corresponde à celle d'un élément de $\bar{\mathfrak{u}}$. Soit $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{u}} \cap \bar{\mathfrak{g}}_{reg}(F)$. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$, fixons un ensemble $\dot{\mathcal{X}}(\bar{X}, y) \subset \mathfrak{u}_{\eta[y]}$ de représentants des classes de conjugaison par $I_{\eta[y]}(F)$ dans la classe de conjugaison stable de $\mathfrak{g}_{\eta[y]}(F)$ correspondant à celle de $\bar{X}$, si cette classe existe. Sinon, on pose $\dot{\mathcal{X}}(\bar{X}, y) = \emptyset$. Notons $C(\bar{X})$ la classe de conjugaison stable commune dans $\tilde{G}(F)$ des $exp(X)\eta[y]$, pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et $X \in \dot{\mathcal{X}}(\bar{X}, y)$. Notons $\bar{\mathfrak{u}}_{\tilde{G}-reg}$ le sous-ensemble des $\bar{X}$ tels que $C(\bar{X})$ soit formé d'éléments fortement réguliers dans $\tilde{G}$.

Notons $\tilde{U}$ l'ensemble des éléments $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tels que la partie semi-simple de γ soit stablement conjuguée à un élément $exp(X)\eta[y]$ pour un $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et un $X \in \mathfrak{u}_{\eta[y]}$ (en supposant $\bar{\mathfrak{u}}$ assez petit pour que ces exponentielles soient définies). Notons $\tilde{U}'$ des éléments $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tels que la partie semi-simple de γ soit conjuguée par un élément de $G(F)$ à un élément $exp(X)\eta[y]$ pour un $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et un $X \in \mathfrak{u}_{\eta[y]}$.

Lemme. *Si $\bar{\mathfrak{u}}$ est assez petit, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) L'ensemble $\tilde{U}$ est ouvert et égal à $\tilde{U}'$.

(ii) L'application $\bar{X} \mapsto C(\bar{X})$ est une surjection de $\bar{\mathfrak{u}}_{\tilde{G}-reg}$ sur l'ensemble des classes de conjugaison stable contenues dans $\tilde{U} \cap \tilde{G}_{reg}(F)$.

(iii) On a $C(\bar{X}) = C(\bar{X}')$ si et seulement s'il existe $\xi \in \Xi^{\Gamma_F}$ tel que $\xi(\bar{X})$ soit stablement conjugué à $\bar{X}'$.

(iv) Pour tout $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{u}}_{\tilde{G}-reg}$, l'ensemble $\{exp(X)\eta[y]; y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta), X \in \dot{\mathcal{X}}(\bar{X}, y)\}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $C(\bar{X})$.

Preuve. On a évidemment $\tilde{U}' \subset \tilde{U}$. Pour démontrer l'inclusion opposée, on peut se limiter aux éléments semi-simples. Soit $\gamma \in \tilde{U}$ un tel élément. On peut fixer $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$, $X \in \mathfrak{u}_{\eta[y]}$ et un diagramme $(\gamma, B, T, B', T', \gamma')$, où $\gamma' = exp(X)\eta[y]$. Posons $\theta' = ad_{\gamma'}$. Le tore $(T')^{\theta',0}$ est un sous-tore maximal de $G_{\gamma'}$. Si $\bar{\mathfrak{u}}$ est assez petit, $G_{\gamma'}$ est le commutant de X dans $G_{\eta[y]}$. Donc X appartient au centre de $\mathfrak{g}_{\gamma'}$, a fortiori à $(\mathfrak{t}')^{\theta'}(F)$. Soit Y l'image de X par l'application $\xi_{T',T} : \mathfrak{t}'(F) \to \mathfrak{t}(F)$. Alors Y est fixe par ad_γ et on vérifie que $(exp(-Y)\gamma, B, T, B', T', \eta[y])$ est un diagramme. Donc $exp(-Y)\gamma$ est stablement conjugué à $\eta[y]$. Il existe donc $y_1 \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ tel que $exp(-Y)\gamma$ soit conjugué à $\eta[y_1]$ par un élément de $G(F)$. Quitte à effectuer une telle conjugaison, on peut supposer que ces deux éléments sont égaux. Alors $\gamma = exp(Y)\eta[y_1]$, avec $Y \in \mathfrak{g}_{\eta[y_1]}(F)$ (parce que Y commute à γ et à $exp(Y)$). Il résulte des définitions des voisinages et de l'hypothèse $X \in \mathfrak{u}_{\eta[y]}$ que Y appartient à $\mathfrak{u}_{\eta[y_1]}$. Cela prouve l'égalité $\tilde{U} = \tilde{U}'$. L'ensemble $\tilde{U}'$ étant clairement ouvert, cela prouve (i).

Le (ii) est évident. Le (iv) est le lemme 3.8 de [W1] (dans cette référence, le corps F est non-archimédien, mais la preuve vaut aussi bien pour F archimédien). Pour le (iii), on peut identifier $\bar{G}$ à G_η muni d'une action galoisienne de la forme $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}} = ad_{u(\sigma)} \circ \sigma$, où $u(\sigma) \in G_{\eta,SC}$. Posons $\gamma = exp(\bar{X})\eta$, $\gamma' = exp(\bar{X}')\eta$. Dire que $C(\bar{X}) = C(\bar{X}')$ revient à dire qu'il existe $g \in G$ tel que $g\gamma g^{-1} = \gamma'$. Si $\bar{\mathfrak{u}}$ est assez petit, cela entraîne $g \in Z_G(\eta)$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on a $\sigma(g)\sigma(\gamma)\sigma(g)^{-1} = \sigma(\gamma')$. Puisque $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{g}}(F)$, on a $\sigma(\gamma) = u(\sigma)^{-1}\gamma u(\sigma)$. De même, $\sigma(\gamma') = u(\sigma)^{-1}\gamma' u(\sigma)$. D'où $u(\sigma)\sigma(g)u(\sigma)^{-1}\gamma u(\sigma)g^{-1}u(\sigma)^{-1} = \gamma'$. Alors $g^{-1}u(\sigma)\sigma(g)u(\sigma)^{-1}$ fixe γ, donc est contenu dans I_γ, lui-même contenu dans I_η. Donc l'image de g dans Ξ est fixe par Γ_F et la conclusion de (iii) s'ensuit. La réciproque est claire. $\square$

4.7 Conjugaison stable et K-espaces tordus

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, les définitions et résultats des trois paragraphes précédents s'adaptent aux K-espaces tordus. Il suffit de définir correctement la notion de conjugaison stable et les ensembles $\mathcal{Y}(\eta)$ et $\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$. Pour des éléments $\gamma \in \tilde{G}_{p,reg}(\mathbb{R})$ et $\gamma' \in \tilde{G}_{p',reg}(\mathbb{R})$, on dit simplement qu'ils sont stablement conjugués si γ est conjugué à $\tilde{\phi}_{p,p'}(\gamma')$ par un élément de G_p. Soit $\eta \in \tilde{G}_{p,ss}(\mathbb{R})$. Pour $p' \in \Pi$, on note $\mathcal{Y}_{p'}(\eta)$ l'ensemble des $y \in G_{p'}$ tels que $y\sigma(y)^{-1}\nabla_{p',p}(\sigma)^{-1} \in I_{\tilde{\phi}_{p',p}(\eta)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Pour $y \in \mathcal{Y}_{p'}(\eta)$, on pose $\eta[y] = y^{-1}\tilde{\phi}_{p',p}(\eta)y$. On note $\dot{\mathcal{Y}}_{p'}(\eta)$ un ensemble de représentants des doubles classes $I_{\tilde{\phi}_{p',p}(\eta)}\backslash\mathcal{Y}_{p'}(\eta)/G_{p'}(F)$. On pose $\mathcal{Y}(\eta) = \sqcup_{p'\in\Pi}\mathcal{Y}_{p'}(\eta)$, $\dot{\mathcal{Y}}(\eta) = \sqcup_{p'\in\Pi}\dot{\mathcal{Y}}_{p'}(\eta)$. Remarquons que, puisque les paires de Borel des différents groupes G_p s'identifient, on peut définir sans changement la notion de diagramme joignant deux éléments semi-simples de $K\tilde{G}(\mathbb{R})$. Avec les définitions ci-dessus, les propriétés (st1) à (st4) de 4.4 restent équivalentes pour $\eta, \eta' \in K\tilde{G}_{ss}(\mathbb{R})$. On dit que η et η' sont stablement conjugués si et seulement si ces conditions sont vérifiées.

4.8 Descente d'Harish-Chandra et stabilité

Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On sait que tout élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$ est stablement conjugué à un élément ϵ pour lequel G_ϵ est quasi-déployé. Soit ϵ vérifiant ces conditions. Posons $\Xi_\epsilon = Z_G(\epsilon)/G_\epsilon$. C'est le même groupe qu'en 4.6 compte tenu du fait que $G_\epsilon = I_\epsilon$ puisque la torsion est intérieure. On a vu que le groupe $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$ agissait sur G_ϵ par automorphismes définis sur F. Pour simplifier, on note cette action comme une conjugaison. Soit $\mathfrak{u}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$ vérifiant les conditions suivantes

- $X \in \mathfrak{u}$ si et seulement si sa partie semi-simple X_{ss} appartient à $\mathfrak{u}$;
- si $X \in \mathfrak{u}$ et $X' \in \mathfrak{g}_\epsilon(F)$ sont conjugués par un élément de $G_\epsilon(\bar{F})$, alors $X' \in \mathfrak{u}$;
- $\mathfrak{u}$ est invariant par l'action de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$.

On suppose $\mathfrak{u}$ assez petit, en particulier l'exponentielle y est définie.

Pour tout $y \in \mathcal{Y}(\epsilon)$, on définit $\mathfrak{u}_{\epsilon[y]}$ comme en 4.6 et on pose $U_{\epsilon[y]} = exp(\mathfrak{u}_{\epsilon[y]})$ (simplement $U_\epsilon = exp(\mathfrak{u})$). On note $\tilde{U}$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F)$ dont la partie semi-simple est stablement conjuguée à un élément de $U_\epsilon\epsilon$. C'est l'ensemble du (i) du lemme 4.6. En effet, pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)$, tout élément semi-simple de $U_{\epsilon[y]}\epsilon[y]$ est stablement conjugué à un élément de $U_\epsilon\epsilon$, cela parce que G_ϵ est quasi-déployé. On définit une correspondance entre $C_c^\infty(\tilde{U})$ et $C_c^\infty((U_\epsilon) \simeq C_c^\infty(\mathfrak{u})$ par : $f \in C_c^\infty(\tilde{U})$ et $\phi \in C_c^\infty(U_\epsilon)$ se correspondent si et seulement si on a l'égalité $S^{\tilde{G}}(x\epsilon, f) = S^{G_\epsilon}(x, \phi)$ pour tout élément $x \in U_\epsilon$ tel que $x\epsilon$ soit fortement régulier dans $\tilde{G}$. Avec des notations évidentes, on a le résultat suivant.

Lemme. *Cette correspondance se quotiente en un isomorphisme*

$$desc_\epsilon^{st} : SI(\tilde{U}) \to SI(U_\epsilon)^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}} \simeq SI(\mathfrak{u})^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}}.$$

Si ϵ est elliptique dans $\tilde{G}(F)$, cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme

$$SI_{cusp}(\tilde{U}) \to SI_{cusp}(U_\epsilon)^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}} \simeq SI_{cusp}(\mathfrak{u})^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}}.$$

Preuve. Notons $C_c^\infty(\tilde{U})'$ et $C_c^\infty(\mathfrak{u})'$ les projections dans $C_c^\infty(\tilde{U})$ et $C_c^\infty(\mathfrak{u})$ du graphe de la correspondance. Notons $SI(\tilde{U})'$ et $SI(\mathfrak{u})'$ leurs images dans $SI(\tilde{U})$ et $SI(\mathfrak{u})$. Puisque toute classe de conjugaison stable dans $\tilde{U}$ contient un élément $exp(X)\epsilon$ avec $X \in \mathfrak{u}$, la correspondance se quotiente alors en un isomorphisme entre $SI(\tilde{U})'$ et $SI(\mathfrak{u})'$. Ce dernier espace est inclus dans $SI(\mathfrak{u})^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}}$: cela résulte du fait que, pour $g \in \Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$ et $X \in \mathfrak{u}$, l'élément $exp(g^{-1}Xg)\epsilon$ est stablement conjugué à $exp(X)\epsilon$. On va montrer que $C_c^\infty(\tilde{U})' = C_c^\infty(\tilde{U})$ tandis que $C_c^\infty(\mathfrak{u})'$ est l'espace des éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{u})$ dont l'image dans $SI(\mathfrak{u})$ est invariante par $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$.

Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{U})$ et X un élément régulier de $\mathfrak{u}$. Le lemme 4.6(iv) décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe stable de $exp(X)\epsilon$. En appliquant les définitions, on obtient

$$S^{\tilde{G}}(exp(X)\epsilon, f) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)} \sum_{X' \in \dot{\mathcal{X}}(X,y)} I^{\tilde{G}}(exp(X')\epsilon[y], f).$$

On effectue la descente d'Harish-Chandra au voisinage de chaque point $\epsilon[y]$. La fonction f correspond ainsi à une fonction disons $\phi'_y \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_{\epsilon[y]})$. Le groupe quasi-déployé G_ϵ se complète de la façon habituelle en une donnée endoscopique de $G_{\epsilon[y]}$ et la fonction ϕ'_y se transfère en une fonction $\phi_y \in C_c^\infty(\mathfrak{u})$. La formule précédente devient

$$S^{\tilde{G}}(exp(X)\epsilon, f) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)} S^{G_\epsilon}(X, \phi_y).$$

Donc la fonction $\phi_f = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)} \phi_y$ correspond à f. Cela prouve l'égalité $C_c^\infty(\tilde{U})' = C_c^\infty(\tilde{U})$.

Inversement, soit $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{u})$ dont l'image dans $SI(\mathfrak{u})$ est invariante par $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$. On a une inclusion $Z_G(\epsilon; F)/G_\epsilon(F) \subset \Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$. Sans changer l'image de ϕ dans $SI(\mathfrak{u})$, on peut remplacer ϕ par la fonction

$$X \mapsto |Z_G(\epsilon; F)/G_\epsilon(F)|^{-1} \sum_g \phi(g^{-1}Xg),$$

où g parcourt un ensemble de représentants de $Z_G(\epsilon; F)/G_\epsilon(F)$. On peut ainsi supposer que l'image de ϕ dans $I(\mathfrak{u})$ est invariante par $Z_G(\epsilon; F)$. Appliquant la descente d'Harish-Chandra, on peut trouver $f \in C_c^\infty(\tilde{U})$ qui correspond à ϕ et dont les intégrales orbitales sont nulles en tout point qui n'est pas conjugué par un élément de $G(F)$ à un élément de $exp(\mathfrak{u})\epsilon$. Appliquant la première partie du raisonnement à cette fonction, on construit une fonction $\phi_f \in C_c^\infty(\mathfrak{u})$ qui correspond à f. On va montrer que l'image de ϕ_f dans $SI(\mathfrak{u})$ est égale à celle de $N\phi$, où N est un entier non nul, ce qui achèvera la preuve de la première assertion du lemme. On a une inclusion naturelle

$$\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}/Z_G(\epsilon;F) \to G_\epsilon \backslash \mathcal{Y}(\epsilon)/G(F).$$

Notons $\dot{\mathcal{Y}}_0(\epsilon)$ le sous-ensemble de $\dot{\mathcal{Y}}(\epsilon)$ représentant l'image de cette inclusion. On peut supposer que, pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}_0(\epsilon)$, $\epsilon[y] = \epsilon$ et l'automorphisme ad_y de G_ϵ est un élément de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$. On peut aussi supposer que $y = 1$ appartient à $\dot{\mathcal{Y}}_0(\epsilon)$. Pour $y = 1$, $\phi_1 = \phi'_1$ a par définition même image que ϕ dans $I(\mathfrak{u})$, a fortiori dans $SI(\mathfrak{u})$. Pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}_0(\epsilon)$, $\phi'_y = \phi'_1$ puisque $y^{-1}\epsilon y = \epsilon$. D'après la propriété ci-dessus de ad_y, le transfert ϕ_y de ϕ'_y a même image dans $SI(\mathfrak{u})$ que l'image de ϕ par l'action d'un élément de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$. Puisque cette dernière image est invariante par ce groupe, ϕ_y a même image que ϕ dans $SI(\mathfrak{u})$. Pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\epsilon) - \dot{\mathcal{Y}}_0(\epsilon)$, aucun élément de $U_{\epsilon[y]}\epsilon[y]$ n'est conjugué par un élément de $G(F)$ à un élément de $U_\epsilon\epsilon$. Sinon, en supposant $\mathfrak{u}$ assez petit, cela entraînerait que $\epsilon[y]$ serait conjugué à ϵ par un élément de $G(F)$ et on voit que cela contredirait l'hypothèse que $y \notin \dot{\mathcal{Y}}_0(\epsilon)$. On peut donc supposer $\phi'_y = 0$ pour ces y et on conclut comme on le voulait que l'image de ϕ_f dans $SI(\mathfrak{u})$ est égale à celle de $|\dot{\mathcal{Y}}_0(\epsilon)|\phi$. Cela achève la preuve de la première assertion de l'énoncé.

Si ϵ est elliptique, pour $X \in \mathfrak{u}$ régulier, X est elliptique dans $\mathfrak{g}_\epsilon(F)$ si et seulement si $exp(X)\epsilon$ est elliptique dans $\tilde{G}(F)$. Il en résulte que l'isomorphisme de la première assertion conserve la cuspidalité. $\square$

Variante. Supposons donnée une extension

$$1 \to C_1 \to G_1 \to G \to 1$$

où C_1 est un tore central induit, une extension compatible

$$\tilde{G}_1 \to \tilde{G}$$

avec $\tilde{G}_1$ à torsion intérieure et un caractère λ_1 de $C_1(F)$. Soit ϵ comme précédemment. Fixons $\epsilon_1 \in \tilde{G}_1(F)$ se projetant sur ϵ. On a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{c}_1 \to \mathfrak{g}_{1,\epsilon_1} \to \mathfrak{g}_\epsilon \to 0$$

On a besoin de scinder convenablement cette suite. La partie semi-simple de $\mathfrak{g}_\epsilon$ se scinde canoniquement par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{1,\epsilon_1,SC} & \simeq & \mathfrak{g}_{\epsilon,SC} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{g}_{1,\epsilon_1} & \to & \mathfrak{g}_\epsilon \end{array}$$

Notons Z_{ϵ_1} et Z_ϵ les centres de G_{1,ϵ_1} et G_ϵ. Le groupe $Z_G(\epsilon)$ agit par conjugaison sur $\tilde{G}_1$. Cette action conserve G_{1,ϵ_1}. En effet, un élément $g \in Z_G(\epsilon)$ envoie ϵ_1 sur $c(g)\epsilon_1$ pour un unique $c(g) \in C_1$, donc envoie G_{1,ϵ_1} sur $G_{1,c(g)\epsilon_1} = G_{1,\epsilon_1}$. L'action de $Z_G(\epsilon)$ se restreint en une action sur Z_{ϵ_1}, qui est l'identité sur C_1. On peut alors trouver une décomposition

$$\mathfrak{z}_{\epsilon_1} = \mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{s}$$

stable pour les actions de Γ_F et de $Z_G(\epsilon)$. On fixe une telle décomposition. La projection $\mathfrak{g}_{1,\epsilon_1} \to \mathfrak{g}_\epsilon$ se restreint en un isomorphisme

$$\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{g}_{1,\epsilon_1,SC} \to \mathfrak{g}_\epsilon$$

et on prend pour section l'isomorphisme réciproque. Soit $\mathfrak{u}$ un voisinage comme précédemment, que l'on identifie par la section à un sous-ensemble de $\mathfrak{g}_{1,\epsilon_1}(F)$. On note $\tilde{U}_1$ l'image réciproque de $\tilde{U}$ dans $\tilde{G}_1(F)$ et on définit l'espace $SI_{\lambda_1}(\tilde{U}_1)$, quotient de $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{U}_1)$ par le sous-espace des fonctions dont les intégrales orbitales stables sont nulles. On définit comme précédemment une correspondance naturelle entre $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{U}_1)$ et $C^\infty_c(\mathfrak{u})$. Comme on l'a dit ci-dessus, un élément de $Z_G(\epsilon)$ envoie ϵ_1 sur $c(g)\epsilon_1$ pour un unique $c(g) \in C_1$. On a $c(g) = 1$ pour $g \in G_\epsilon$. D'autre part, si l'image de g dans $Z_G(\epsilon)/G_\epsilon = \Xi_\epsilon$ est fixe par Γ_F, $c(g)$ appartient à $C_1(F)$. On obtient un caractère $g \mapsto \lambda_1(c(g)^{-1})$ du groupe $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$. Alors

(1) la correspondance ci-dessus se quotiente en un isomorphisme entre $SI_{\lambda_1}(\tilde{U}_1)$ et le sous-espace des éléments de $SI(\mathfrak{u})$ qui se transforment selon ce caractère de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$.

Considérons maintenant d'autres extensions

$$1 \to C_2 \to G_2 \to G \to 1,\ \tilde{G}_2 \to \tilde{G}$$

et un caractère λ_2 de $C_2(F)$, vérifiant les mêmes conditions que ci-dessus. Introduisons comme en 2.5 les produits fibrés G_{12} et $\tilde{G}_{12}$ et supposons donnés un caractère λ_{12} de $G_{12}(F)$ et une fonction non nulle $\tilde{\lambda}_{12}$ sur $\tilde{G}_{12}(F)$ vérifiant les conditions de ce paragraphe, c'est-à-dire

- la restriction de λ_{12} à $C_1(F) \times C_2(F)$ est $\lambda_1 \times \lambda_2^{-1}$;

- pour $(\gamma_1, \gamma_2) \in \tilde{G}_{12}(F)$ et $(x_1, x_2) \in G_{12}(F)$, on a l'égalité $\tilde{\lambda}_{12}(x_1\gamma_1, x_2\gamma_2) = \lambda_{12}(x_1, x_2)\tilde{\lambda}_{12}(\gamma_1, \gamma_2)$.

Par la construction ci-dessus, chaque série de données définit un caractère de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$. On a

(2) ces caractères sont égaux.

Fixons ϵ_1 comme plus haut et ϵ_2 de façon similaire. Soit $g \in Z_G(\epsilon)$ s'envoyant sur un élément de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$. Pour $i = 1, 2$, on a $ad_g(\epsilon_i) = c_i(g)\epsilon_i$ avec $c_i(g) \in C_i(F)$. Il s'agit de prouver que $\lambda_1(c_1(g)) = \lambda_2(c_2(g))$. En posant $\epsilon_{12} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ et $\epsilon'_{12} = (ad_g(\epsilon_1), ad_g(\epsilon_2))$, il revient au même de prouver que $\tilde{\lambda}_{12}(\epsilon_{12}) = \tilde{\lambda}_{12}(\epsilon'_{12})$. Puisque G_{12} est quasi-déployé, il coïncide avec le groupe $G_{12,0}$ qu'on lui a associé en 1.12. Il en résulte que l'application $N^{\tilde{G}_{12}}$ se quotiente en l'injection $\pi(G_{12,SC}(F))\backslash\tilde{G}_{12}(F) \to \tilde{G}_{12,ab}(F)$. Par construction, les éléments ϵ_{12} et ϵ'_{12} sont stablement conjugués. D'après le lemme 4.5, on a $N^{\tilde{G}_{12}}(\epsilon_{12}) = N^{\tilde{G}_{12}}(\epsilon'_{12})$, donc $\epsilon'_{12} \in \pi(G_{12,SC}(F))\epsilon_{12}$. Le caractère λ_{12} est forcément trivial sur $\pi(G_{12,SC}(F))$. Donc $\tilde{\lambda}_{12}(\epsilon_{12}) = \tilde{\lambda}_{12}(\epsilon'_{12})$ comme on le voulait. Cela prouve (2).

4.9 Conjugaison stable et endoscopie

Soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique relevante pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Fixons un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$. On fixe une forme quasi-déployée $\bar{G}$ de G_η. On fixe de même une forme quasi-déployée G'^*_ϵ de G'_ϵ. A l'aide du diagramme, on a construit en [W1] 3.5 une donnée endoscopique $\bar{\mathbf{G}}' = (\bar{G}', \bar{\mathcal{G}}', \bar{s})$ de $\bar{G}_{SC}$. Il s'agit d'endoscopie usuelle, il n'y a ici ni torsion, ni caractère. Les deux groupes $G'^*_{\epsilon,SC}$ et $\bar{G}'_{SC}$ forment une paire endoscopique non standard ([W1] 1.7). Précisons les correspondances de tores. Fixons des paires de Borel dans chacun des groupes, dont on note les tores $\bar{T}$ pour $\bar{G}$, $\bar{T}'$ pour $\bar{G}'$ et T'^* pour G'^*_ϵ. Si on oublie les actions galoisiennes, on peut identifier $\bar{T}$ à $T^{\theta,0}$, où $\theta = ad_\eta$, et T'^* à T'. De l'homomorphisme $\xi_{T,T'}$ se déduit un isomorphisme

$$X_*(\bar{T}) \otimes \mathbb{Q} \to X_*(T'^*) \otimes \mathbb{Q}.$$

De même, on peut choisir un homomorphisme $\xi_{\bar{T}_{sc},\bar{T}'}$ (qui est un isomorphisme puisque la situation n'est pas tordue), d'où un isomorphisme

$$X_*(\bar{T}_{sc})\otimes\mathbb{Q}\to X_*(\bar{T}')\otimes\mathbb{Q}.$$

Enfin, sous-jacent à la notion d'endoscopie non standard, il y a un isomorphisme

$$X_*(T'^*_{sc})\otimes\mathbb{Q}\to X_*(\bar{T}'_{sc})\otimes\mathbb{Q},$$

qui, lui, est équivariant pour les actions galoisiennes. Ces homomorphismes sont compatibles. De plus, il s'en déduit un isomorphisme

$$X_*(Z(G'_\epsilon)^0)\otimes\mathbb{Q}\to (X_*(Z(\bar{G})^0)\otimes\mathbb{Q})\oplus(X_*(Z(\bar{G}')^0)\otimes\mathbb{Q})$$

qui est compatible aux actions galoisiennes.

Ces isomorphismes induisent des correspondances compatibles entre classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples réguliers dans les algèbres de Lie des différents groupes.

Rappelons que l'on dit que ϵ et η se correspondent s'il existe un diagramme les joignant.

Remarque. Si ϵ et η se correspondent, il existe un diagramme $(\epsilon,B',T',B,T,\eta)$ tel que T' est un tore elliptique de G'_ϵ si F est non-archimédien, resp. est un tore fondamental de G'_ϵ si F est archimédien. A l'aide des rappels ci-dessus, cela résulte que, puisque $\bar{\mathbf{G}}'$ est une donnée endoscopique relevante de $G_{\eta,SC}$, tout sous-tore maximal elliptique, resp. fondamental, de $\bar{G}'$ se transfère à $G_{\eta,SC}$.

Cette correspondance induit une correspondance entre classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans $\tilde{G}'(F)$ et $\tilde{G}(F)$. Précisément, pour de tels éléments

(1) si ϵ correspond à η et η', alors η et η' sont stablement conjugués ;

(2) si ϵ correspond à η et ϵ' est stablement conjugué à ϵ, alors ϵ' correspond à η ;

(3) si ϵ correspond à η et si $\tilde{\alpha}_x$ est un automorphisme défini sur F de $\tilde{G}'$ provenant d'un élément $x\in Aut(\mathbf{G}')$, alors $\tilde{\alpha}_x(\epsilon)$ correspond à η.

Le (1) est le lemme 3.4 de [W1]. Pour (2), d'après la remarque ci-dessus, s'il existe un diagramme $(\epsilon,B',T',B,T,\eta)$, on peut le remplacer par un autre où T' est elliptique ou fondamental dans G'_ϵ. Un tel tore se transférant à toute forme intérieure, (2) s'ensuit. Le (3) résulte des définitions.

Remarquons que les assertions réciproques de (1) et (2) sont fausses en général. La réciproque de (1) devient toutefois vraie si $\mathbf{G}'$ est elliptique ainsi que ϵ (avec notre définition : ϵ est elliptique si il appartient à un sous-tore maximal elliptique de G'). D'autre part, parce que l'on sait que dans la classe de conjugaison stable de ϵ, il y a toujours un élément dont le commutant connexe est quasi-déployé, (2) nous permet de nous limiter à considérer des ϵ vérifiant cette propriété.

Restreignons-nous maintenant aux éléments elliptiques. Pour un élément semi-simple elliptique $\eta\in\tilde{G}(F)$, considérons les couples $(\mathbf{G}',\epsilon)$ où $\mathbf{G}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ et $\epsilon\in\tilde{G}'(F)$ est un élément semi-simple elliptique qui correspond à η et dont le commutant connexe G'_ϵ est quasi-déployé. Disons que deux couples $(\mathbf{G}'_1,\epsilon_1)$ et $(\mathbf{G}'_2,\epsilon_2)$ sont équivalents si et seulement s'il existe un isomorphisme $\tilde{\alpha}:\tilde{G}'_1\to\tilde{G}'_2$ défini sur F et provenant d'une équivalence entre $\mathbf{G}'_1$ et $\mathbf{G}'_2$ de sorte que ϵ_2 soit stablement conjugué à $\tilde{\alpha}(\epsilon_1)$. On fixe un ensemble $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$ de représentants des classes d'équivalence de ces couples. Pour tout $(\mathbf{G}',\epsilon)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$, on fixe des données auxiliaires $G'_1,...,\Delta_1$ (notons que $\mathbf{G}'$ est forcément relevant) et un élément $\epsilon_1\in\tilde{G}'_1(F)$ qui relève ϵ.

Considérons d'abord le cas où η est fortement régulier et F est non archimédien. On a d'abord

- si ω n'est pas trivial sur $Z_G(\eta;F)$, alors $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)=\emptyset$, cf. [KS1] lemme 4.4.C.

Supposons ω trivial sur $Z_G(\eta;F)$. Fixons un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}(\eta)$ des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de η. On définit les deux applications linéaires

$$(4)\qquad \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^{\dot{\mathcal{X}}(\eta)} & \to & \mathbb{C}^{\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)}\\ (x_{\eta'})_{\eta'\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)} & \mapsto & (y_{(\mathbf{G}',\epsilon)})_{(\mathbf{G}',\epsilon)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)}\end{array}$$

où

$$y_{(\mathbf{G}',\epsilon)}=d(\theta^*)^{1/2}\sum_{\eta'\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)}\Delta_1(\epsilon_1,\eta')[Z_G(\eta';F):G_{\eta'}(F)]^{-1}x_{\eta'}$$

(le Δ_1 est bien sûr celui de $\mathbf{G}'$) ;

$$(5)\qquad \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^{\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)} & \to & \mathbb{C}^{\dot{\mathcal{X}}(\eta)}\\ (y_{(\mathbf{G}',\epsilon)})_{(\mathbf{G}',\epsilon)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)} & \mapsto & (x_{\eta'})_{\eta'\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)}\end{array}$$

où

$$x_{\eta'}=[Z_G(\eta';F):G_{\eta'}(F)]|\dot{\mathcal{X}}(\eta)|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2}\sum_{(\mathbf{G}',\epsilon)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)}\Delta_1(\epsilon_1,\eta')^{-1}y_{(\mathbf{G}',\epsilon)}.$$

L'assertion fondatrice de la théorie de l'endoscopie tordue est que ces deux applications linéaires sont inverses l'une de l'autre. On renvoie pour cette assertion à Kottwitz-Shelstad ([KS]) et à Labesse ([Lab2]), bien que ces auteurs détaillent plutôt le cas où le corps de base est un corps de nombres.

Dans le cas où $F=\mathbb{R}$, on doit considérer un K-espace tordu. Pour $\eta\in K\tilde{G}_{reg}(\mathbb{R})$, on définit sans changement l'ensemble $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$. On fixe pour tout $p\in\Pi$ un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}_p(\eta)$ des classes de conjugaison par $G_p(\mathbb{R})$ dans l'intersection de $\tilde{G}_p(\mathbb{R})$ avec la classe de conjugaison stable de η. On pose $\dot{\mathcal{X}}(\eta)=\sqcup_{p\in\Pi}\dot{\mathcal{X}}_p(\eta)$. Avec ces définitions, les applications (4) et (5) sont encore inverses l'une de l'autre. C'est la raison d'être des K-espaces tordus.

La correspondance entre éléments semi-simples elliptiques non fortement réguliers est plus compliquée. L'important pour nous est qu'elle forme un "bord" satisfaisant à celle des éléments fortement réguliers. Notons $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$ l'ensemble des éléments semi-simples elliptiques de $\tilde{G}(F)$, pas forcément réguliers. Notons $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$. Soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique pour $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. On définit de même l'espace $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}/st-conj$. D'après le lemme 4.5, l'application $N^{\tilde{G}'}$ restreinte à $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}$ se factorise par cet ensemble de classes de conjugaison stable. A fortiori, l'application $N^{\tilde{G}',\tilde{G}}$ se factorise de même. Dans le cas où F est non-archimédien, on note $\tilde{G}'_{ss}(F)^{\tilde{G}}_{ell}/st-conj$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ dont l'image par cette application appartient à l'image de $\tilde{G}_{ab}(F)$ par $N^{\tilde{G}}$. Dans le cas où $F=\mathbb{R}$ et où on travaille avec des K-espaces tordus, on pose la même définition en remplaçant $\tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$ par $K\tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$. Montrons que

(6) un élément $\epsilon\in\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}$ correspond à un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$ (ou de $K\tilde{G}(\mathbb{R})$) si et seulement si sa classe de conjugaison stable appartient à $\tilde{G}'_{ss}(F)^{\tilde{G}}_{ell}/st-conj$.

Preuve. Supposons qu'il existe un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$. Pour $X \in \mathfrak{t}^\theta(F)$ assez petit et en position générale et pour $Y = \xi_{T,T'}(X)$, les éléments $exp(Y)\epsilon$ et $exp(X)\eta$ sont fortement réguliers et se correspondent. D'après la proposition 1.14(i), l'image par $N^{\tilde{G}',\tilde{G}}$ de $exp(Y)\epsilon$ appartient à l'image de $\tilde{G}_{ab}(F)$ par $N^{\tilde{G}}$. Cette image étant fermée, $N^{\tilde{G}',\tilde{G}}(\epsilon)$ lui appartient aussi et l'image de ϵ dans $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ appartient à $\tilde{G}'_{ss}(F)^{\tilde{G}}_{ell}/st-conj$. Inversement, supposons que cette condition soit vérifiée. Supposons pour simplifier F non archimédien, l'extension aux K-espaces étant similaire. Puisque ϵ est elliptique, on peut fixer un sous-tore maximal T' de G'_ϵ, défini sur F et elliptique dans G'. Pour $Y \in \mathfrak{t}'(F)$ assez petit et en position générale, $exp(Y)\epsilon$ est elliptique régulier et son image par $N^{\tilde{G}',\tilde{G}}$ appartient à l'image de $\tilde{G}_{ab}(F)$ par $N^{\tilde{G}}$. Par la proposition 1.14(ii), il existe $\gamma \in \tilde{G}(F)_{reg}$ tel que $(exp(Y)\epsilon, \gamma) \in \mathcal{D}$. On peut fixer un diagramme joignant $exp(Y)\epsilon$ et γ. Le tore T' de ce diagramme est imposé : c'est le commutant de $exp(Y)\epsilon$, donc c'est le tore T' déjà introduit. Notons $(exp(Y)\epsilon, B', T', B, T, \gamma)$ ce diagramme. Puisque $exp(Y)\epsilon$ conserve (B', T') et $Y \in \mathfrak{t}'(F)$, ϵ conserve lui-aussi (B', T'). De l'application $\xi_{T,T'}$ résulte un isomorphisme $\mathfrak{t}^\theta(F) \to \mathfrak{t}'(F)$. Soit $X \in \mathfrak{t}^\theta(F)$ correspondant à Y, posons $\eta = exp(-X)\gamma$. Par le même argument, η conserve (B, T). Alors $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ est un diagramme. $\square$

D'après (1) ci-dessus, et en remarquant qu'un élément elliptique de $\tilde{G}'(F)$ ne peut correspondre qu'à un élément elliptique de $\tilde{G}(F)$, on a une application

$$(7) \qquad \tilde{G}'_{ss}(F)^{\tilde{G}}_{ell}/st-conj \to \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj.$$

Munissons $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$ de la topologie induite par celle de $\tilde{G}(F)$ et $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ de la topologie la moins fine pour laquelle la projection $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell} \to \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ est continue. On munit de même $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ d'une topologie et $\tilde{G}'_{ss}(F)^{\tilde{G}}_{ell}/st-conj$ de la topologie induite.

Lemme. *L'espace $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ est séparé et localement compact. La projection $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell} \to \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ est ouverte. L'application (7) est continue et propre.*

Preuve. Soient η_1 et η_2 deux éléments de $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$ qui ne sont pas stablement conjugués. On construit comme en 4.6 des voisinages $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ de η_1 et η_2. La caractérisation du lemme 4.6(i) montre que l'on peut les construire disjoints. Ils sont invariants par conjugaison stable. Alors leurs images dans $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ sont des voisinages disjoints des images de η_1 et η_2. Pour un seul élément η, construisons un voisinage $\tilde{U}$ comme en 4.6 issu d'un voisinage $\mathfrak{u}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$ qui est compact modulo conjugaison par $G_\eta(F)$. Alors son image dans $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ est un voisinage compact de l'image de η. Cela prouve les deux premières assertions de l'énoncé. Par ailleurs, l'image de $\tilde{U}$ est égale à celle de $exp(\mathfrak{u})\eta$. En effet, un élément de $\tilde{U}$ est conjugué par $G(F)$ à un élément $exp(X)\eta[y]$ pour un $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et $X \in \mathfrak{u}_{\eta[y]}$. Si l'élément est semi-simple elliptique, il existe un sous-tore maximal elliptique $T_\natural$ de $G_{\eta[y]}$ tel que $X \in \mathfrak{t}_\natural(F)$. Parce que ce tore est elliptique, il se transfère par le torseur ad_y en un sous-tore elliptique de G_η et notre élément est stablement conjugué à un élément de $exp(\mathfrak{u})\eta$. Cela prouve l'assertion. Mais alors l'image de $exp(\mathfrak{u})\eta$ dans $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ est un voisinage de celle de η. Puisqu'on peut prendre $\mathfrak{u}$ aussi petit que l'on veut, modulo conjugaison par $G_\eta(F)$, la projection $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell} \to S\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$ est ouverte. Puisque l'application $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell} \to \tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ est ouverte, il suffit, pour prouver la continuité de (7), de prouver que l'application composée $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell} \to \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ l'est. Soient $\epsilon \in \tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}$ et $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$ qui se correspondent. Pour tout élément ϵ' de $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}$ assez proche de ϵ, il y a un sous-tore elliptique T' de G'_ϵ tel que $\epsilon' = exp(Y)\epsilon$, avec $Y \in \mathfrak{t}'(F)$ et Y proche de 0. Puisqu'il n'y a à conjugaison près qu'un nombre fini de tores elliptiques T', on peut fixer celui-ci. On voit en précisant ce que l'on a dit plus haut que l'on peut fixer un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ où T' est le tore fixé. En fixant une section de l'homormophisme $\xi_{T,T'} : \mathfrak{t}(F) \to \mathfrak{t}'(F)$, on voit que, quand Y tend vers 0 dans $\mathfrak{t}'(F)$, l'élément $exp(Y)\epsilon$ correspond à un élément $exp(X)\eta$ avec $X \in \mathfrak{t}(F)$ tendant vers 0. Cela prouve la continuité de (7). Soit maintenant $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$. Fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{X}}$ des classes de conjugaison par $G'(F)$ dans l'ensemble des éléments de $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}$ qui correspondent à η. C'est un ensemble fini puisqu'il est en tout cas inclus dans un ensemble fini de classes de conjugaison par $G(\bar{F})$. Soit $(\epsilon_n, \eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de couples qui se correspondent dans $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell} \times \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$ telle que η_n tend vers η. Un raisonnement similaire à celui de la preuve du lemme 1.10(ii) montre que, quitte à remplacer ϵ_n par un élément stablement conjugué, on peut supposer que ϵ_n appartient à un voisinage arbitraire de $\underline{\mathcal{X}}$ quand n est assez grand. Autrement dit, l'image dans $\tilde{G}'_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ d'un voisinage de $\underline{\mathcal{X}}$ contient l'image réciproque par (7) d'un voisinage assez petit de l'image de η dans $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$. Cela entraîne que (7) est propre. $\square$

On peut préciser la dernière assertion de la façon suivante. Soit $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$. On fixe comme plus haut un ensemble $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$. Pour tout $(\mathbf{G}', \epsilon) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$, fixons un voisinage U'_ϵ de ϵ dans $\tilde{G}'(F)$. Alors il existe un voisinage U de η dans $\tilde{G}(F)$ tel que, pour tout $\gamma \in U$ elliptique régulier, on peut choisir pour $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)$ un ensemble tel que, pour tout élément $(\mathbf{G}', \delta)$ de cet ensemble, il existe ϵ tel que $(\mathbf{G}', \epsilon) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$ et $\delta \in U'_\epsilon$.

4.10 Rappels sur la transformation de Fourier et l'endoscopie

Supposons F non-archimédien, $\tilde{G} = G$ et $\omega = 1$. La théorie de l'endoscopie vaut aussi pour les algèbres de Lie, avec quelques simplifications. Par exemple, pour une donnée endoscopique $\mathbf{G}'$, les données auxiliaires G'_1, C_1 et $\hat{\xi}_1$ ne servent plus à rien. Modulo le choix d'un facteur de transfert, on peut poser $C_c^\infty(\mathfrak{g}') = C_c^\infty(\mathfrak{g}'(F))$. Fixons une transformation de Fourier dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ comme en 4.1. Elle en détermine une dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}'(F))$, cf. [W1]. Elle se quotiente en une transformation de $SI(\mathfrak{g}'(F))$. On a

(1) il existe un nombre complexe non nul $\gamma(\mathfrak{g})$ tel que, pour toute donnée endoscopique $\mathbf{G}'$ et toutes $f \in I(\mathfrak{g}(F))$, $f' \in SI(\mathfrak{g}'(F))$, l'égalité $f' = transfert(f)$ équivaut à $\gamma(\mathfrak{g}')\hat{f}' = transfert(\gamma(\mathfrak{g})\hat{f})$.

Arthur a prouvé en [A2] lemme 3.4 que

(2) l'homomorphisme de transfert

$$I(\mathfrak{g}(F)) \to \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)} SI(\mathfrak{g}'(F))$$

se restreint en un isomorphisme

$$I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \simeq \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(G)} SI_{cusp}(\mathfrak{g}'(F))^{Aut(\mathbf{G}')}.$$

Remarques. (3) L'action de $Aut(\mathbf{G}')$ est définie comme en 2.6. On peut définir une action intrinsèque de $Aut(\mathbf{G}')$ dans $\mathfrak{g}'(F)$ mais l'action que l'on considère est cette action intrinsèque tordue par un caractère qui tient compte du facteur de transfert.

(4) Supposons G quasi-déployé. Par définition, $SI_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ est le sous-espace de $SI(\mathfrak{g}(F))$ annulé par les applications $f \mapsto f_M$ pour tout Levi propre. C'est donc l'image

du sous-espace des $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telles que $S^G(X,f) = 0$ pour tout X régulier dans une sous-algèbre de Levi propre. Ce sous-espace contient évidemment $C_{cusp}^\infty(\mathfrak{g}(F))$ mais ne lui est pas égal. En fait, l'assertion (2) montre que $SI_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ est bien l'image de $C_{cusp}^\infty(\mathfrak{g}(F))$. On reviendra sur ce point en 4.15.

Soient maintenant G et G' deux groupes en situation d'endoscopie non standard, cf. [W1] 1.7. Rappelons que G et G' sont quasi-déployés et simplement connexes et qu'il y a une application de transfert entre $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et $C_c^\infty(\mathfrak{g}'(F))$ (avec facteur de transfert égal à 1 sur les couples qui se correspondent). On a

(5) l'homomorphisme de transfert définit des isomorphismes

$$SI(\mathfrak{g}(F)) \simeq SI(\mathfrak{g}'(F)),$$

$$SI_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \simeq SI_{cusp}(\mathfrak{g}'(F)),$$

qui commutent à la transformation de Fourier.

4.11 Image du transfert

On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques et relevantes de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. On l'étend en un ensemble des représentants $\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$ de représentants des classes d'équivalence de couples $(\tilde{M},\mathbf{M}')$ où $\tilde{M}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique et relevante pour $(\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. On note $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$ le sous-espace des éléments $(\mathbf{f}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}) \in \oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) pour tout $(\tilde{M},\mathbf{M}') \in \mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ est invariant par $Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')$;

(2) soit $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ et M' un Levi de G' qui est relevant ; soit $(\tilde{M},\mathbf{M}')$ l'élément de $\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$ qui lui est associé par la construction de 3.4 ; alors $(\mathbf{f}_{\mathbf{G}'})_{\tilde{M}'} = \mathbf{f}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$;

(3) soit $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ et M' un Levi de G' qui n'est pas relevant ; alors $(\mathbf{f}_{\mathbf{G}'})_{\tilde{M}'} = 0$.

D'après (2) et 3.3(3), la projection naturelle de $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$ dans $\oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(F))$ est injective. On note $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$ l'image de cette projection.

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on travaille avec un K-espace tordu $K\tilde{G}$. Les espaces $I(\tilde{G}(F),\omega)$ et $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$ ont des analogues évidents $I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ et $I_{cusp}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Il est peut-être judicieux de noter $I_+^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ et $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ les espaces $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ et $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, bien que leurs définitions ne fassent pas référence au K-espace.

Proposition. *(i) Supposons F non archimédien. Alors l'application de transfert*

$$I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F)) \to \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(F))$$

est injective et a pour image l'espace $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$. L'image de $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$ est

$$\oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI_{cusp}(\mathbf{G}')^{Aut(\mathbf{G}')} \otimes Mes(G'(F)).$$

(ii) Supposons $F = \mathbb{R}$. L'assertion devient vraie si on remplace $I(\tilde{G}(F),\omega)$, $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$ et $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$ par $I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, $I_{cusp}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ et $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$.

La preuve occupe les paragraphes 4.12 et 4.13. Remarquons que l'on peut définir une application de transfert

$$(4)\qquad \begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F)) & \to & \sum_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{M}')\otimes Mes(M'(F)) \\ \mathbf{f} & \mapsto & (\mathbf{f}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')})_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})} \end{array}$$

où $\mathbf{f}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ est le transfert à $\mathbf{M}'$ de $\mathbf{f}_{\tilde{M},\omega}\in I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))$ (on peut évidemment remplacer les $I(\tilde{G}(F),\omega)$ etc... par des $I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ etc... dans le cas réel). L'application du (ii) de l'énoncé est la composée de cette application et d'une projection naturelle. Or il est clair par construction et d'après 2.6 que l'image de l'application (4) est contenue dans l'espace $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$. Donc l'application de transfert de l'énoncé prend ses valeurs dans $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$. D'autre part, la première assertion de l'énoncé équivaut à dire que l'image de l'application (4) est $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$.

Dans les deux paragraphes suivants, on suppose fixées des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant, ce qui nous débarrasse des espaces de mesures.

4.12 Preuve de la proposition 4.11 dans le cas non-archimédien

On a défini en 4.2 la filtration $(\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega))_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $\mathcal{F}^nI_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$ le sous-espace des éléments $(f_{(\tilde{L},\mathbf{L}')})\in I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$ tels que $f_{(\tilde{L},\mathbf{L}')}=0$ pour tout espace de Levi $\tilde{L}$ tel que $a_{\tilde{L}}>n$. Ces sous-espaces forment une filtration de $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$. Notons $GrI(\tilde{G}(F),\omega)$ et $GrI_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$ les gradués associés à ces filtrations. Fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{L}}$ des classes de conjugaison par $G(F)$ d'espaces de Levi de $\tilde{G}$. D'après le lemme 4.2, on a l'isomorphisme

$$(1)\qquad GrI(\tilde{G}(F),\omega)\simeq\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}}I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}.$$

On a d'autre part une inclusion naturelle

$$(2)\qquad GrI_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)\subset\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}}(\oplus_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}SI_{cusp}(\mathbf{M}')^{Aut(\mathbf{M}')})^{W(\tilde{M})}$$

$$=\oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})}SI_{cusp}(\mathbf{M}')^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')}.$$

L' application de transfert (4) de 4.11 est compatible aux filtrations et l'application qui en résulte entre les gradués n'est autre que la somme des applications naturelles de transfert. Supposons prouvé que le transfert induit un isomorphisme

$$(3)\qquad I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)\simeq\oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})}SI_{cusp}(\mathbf{G}')^{Aut(\mathbf{G}')}.$$

On a alors un isomorphisme analogue

$$I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)\simeq\oplus_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}SI_{cusp}(\mathbf{M}')^{Aut(\mathbf{M}')}.$$

pour chaque $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}$. Le transfert est compatible aux actions de $W(\tilde{M})$, on peut donc remplacer les deux membres ci-dessus par leurs sous-espaces d'invariants par $W(\tilde{M})$. On voit alors que l'inclusion (2) est elle-aussi une égalité et que l'application graduée $GrI(\tilde{G}(F),\omega)\to GrI_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)$ est un isomorphisme. Le (i) de la proposition 4.11 en résulte.

Il faut montrer que (3) est un isomorphisme. Rappelons d'abord une propriété fondamentale. Notons $C_{ell}^{\infty}(\tilde{G}(F))$ le sous-espace de $C_c^{\infty}(\tilde{G}(F))$ formé des éléments à support elliptique fortement régulier et notons $I_{ell}(\tilde{G}(F),\omega)$ son image dans $I(\tilde{G}(F))$. On définit de façon similaire des espaces $SI_{\tilde{G}-ell}(\mathbf{G}')$ en remplaçant la condition fortement régulier par fortement $\tilde{G}$-régulier. Alors

(4) le transfert définit un isomorphisme

$$I_{ell}(\tilde{G}(F),\omega) \simeq \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI_{\tilde{G}-ell}(\mathbf{G}')^{Aut(\mathbf{G}')}.$$

Cela résulte des faits suivants. D'abord, les $\eta \in \tilde{G}(F)$ elliptiques et fortement réguliers pour lesquels ω est non trivial sur $Z_G(\eta;F)$ ne comptent pas : du côté de $I_{ell}(\tilde{G}(F),\omega)$, les intégrales orbitales sont toutes nulles au voisinage d'un tel point ; et il ne leur correspond rien du côté droit de la formule ci-dessus. Fixons $\eta \in \tilde{G}(F)_{ell}$ tel que ω soit trivial sur $Z_G(\eta;F)$. Pour chaque $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, on fixe des données auxiliaires $G_1',...,\Delta_1$. Soit $f \in C_{ell}^{\infty}(\tilde{G}(F))$. Alors les familles $(I^{\tilde{G}}(\eta',\omega,f))_{\eta'\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)}$ et $(S^{\tilde{G}_1'}(\epsilon_1,f^{G_1'}))_{(\mathbf{G}',\epsilon)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)}$ se déduisent l'une de l'autre par les transformations bijectives (4) et (5) de 4.9.

L'application (3) est injective : si $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$ a un transfert nul, il résulte de (4) (ou plus exactement de sa preuve) que $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=0$ pour tout élément fortement régulier et elliptique ; la cuspidalité de f entraîne alors $f=0$.

La preuve de la surjectivité nécessite quelques préparatifs. Fixons $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$ et une forme intérieure quasi-déployée $\bar{G}$ de G_η. On fixe un voisinage $\bar{\mathfrak{u}}$ de 0 dans $\bar{\mathfrak{g}}(F)$ vérifiant les conditions de 4.6. et on utilise les constructions de ce paragraphe. La descente d'Harish-Chandra nous fournit une application

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} I_{cusp}(\tilde{U},\omega) & \to & \oplus_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} I_{cusp}(\mathfrak{u}_{\eta[y]},\omega)^{Z_G(\eta[y],F)} \\ f & \mapsto & (f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} \end{array}.$$

Son image est formée des familles $(f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)}$ telles que $f_y = f_{y'}$ si $\eta[y]=\eta[y']$. Fixons une transformation de Fourier sur $C_c^{\infty}(\bar{\mathfrak{g}}(F))$, dont on déduit de telles transformations dans chaque $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}_{\eta[y]}(F))$. On vérifie que ces transformations sont les mêmes dans le cas où $\eta[y]=\eta[y']$.

Pour tout $(\mathbf{G}',\epsilon) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$, on fixe un diagramme joignant ϵ à un élément $\eta[y]$ (on peut d'ailleurs supposer $\eta[y]=\eta$ mais peu importe). On utilise les constructions de 4.9 pour ce diagramme, en les affectant au besoin d'indices ϵ. C'est-à-dire que l'on introduit la donnée endoscopique $\bar{\mathbf{G}}'_\epsilon = (\bar{G}'_\epsilon, \bar{\mathcal{G}}'_\epsilon, \bar{s}_\epsilon)$ de $\bar{G}_{SC}$. Les isomorphismes décrits en 4.9 fournissent une correspondance entre classes de conjugaison stable semi-simples dans $\mathfrak{g}'_\epsilon(F)$ et dans $\bar{\mathfrak{g}}(F)$. On note $\mathfrak{u}'_\epsilon$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}'_\epsilon(F)$ dont la partie semi-simple a une classe de conjugaison stable qui correspond à celle d'un élément de $\bar{\mathfrak{u}}$. En scindant la projection $\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1}(F) \to \mathfrak{g}'_\epsilon(F)$ comme en 4.8, on identifie $\mathfrak{u}'_\epsilon$ à un sous-ensemble de $\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1}(F)$. On note $\tilde{U}''_{1,\epsilon_1}$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}'_1(F)$ dont la partie semi-simple est stablement conjuguée à un élément de $C_1(F)exp(\mathfrak{u}_\epsilon)\epsilon_1$. Rappelons qu'un élément de $Aut(\mathbf{G}')$ est défini par un élément $x \in \hat{G}$, lequel détermine un automorphisme $\tilde{\alpha}_x$ de $\tilde{G}'$. On note $\tilde{U}'_{1,\epsilon_1}$ la réunion des $\tilde{\alpha}_x(\tilde{U}''_{1,\epsilon_1})$ pour tous les $x \in Aut(\mathbf{G}')$. Puisque les fonctions que l'on considère sur $\tilde{G}'_1(F)$ se transforment selon le caractère λ_1 de $C_1(F)$, la descente définit une application

$$SI_{\lambda_1,cusp}(\tilde{U}'_{1,\epsilon_1}) \to SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon).$$

D'après 4.8, son image est le sous-espace des éléments de $SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon)$ qui se transforment selon un certain caratère de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$, où $\Xi_\epsilon = Z_{G'}(\epsilon)/G'_\epsilon$.

L'espace $SI_{\lambda_1,cusp}(\tilde{U}'_{1,\epsilon_1})$ est stable par l'action de $Aut(\mathbf{G}')$. Nous voulons déterminer l'image de l'application

$$(6) \qquad SI_{\lambda_1,cusp}(\tilde{U}'_{1,\epsilon_1})^{Aut(\mathbf{G}')} \to SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon).$$

Pour $x \in Aut(\mathbf{G}')$, l'action de x n'impose une condition au voisinage de ϵ_1 que si $\tilde{\alpha}_x(\epsilon)$ et ϵ sont stablement conjugués. S'il en est ainsi, un élément $g' \in G'$ qui établit cette conjugaison stable définit un torseur intérieur entre les commutants connexes de ces éléments. Or on a supposé ces groupes quasi-déployés. Quitte à modifier g', on peut donc supposer que ce torseur intérieur est un isomorphisme défini sur F. Cela conduit à introduire l'ensemble Aut_ϵ des couples (g', x) où x est comme ci-dessus et $g' \in G'$ est tel que $g'\tilde{\alpha}_x(\epsilon)(g')^{-1} = \epsilon$ et que l'automorphisme $ad_{g'} \circ \alpha_x$ de G'_ϵ soit défini sur F. Soit $(g', x) \in Aut_\epsilon$. Considérons les couples $(Y', Y) \in \mathfrak{u}'_\epsilon \times \mathfrak{u}'_\epsilon$ d'éléments tels que $Y' = ad_{g'} \circ \alpha_x(Y)$, avec Y en position générale. D'après la construction de 2.6, il existe une fonction $(Y', Y) \mapsto \Lambda_{g',x}(Y', Y)$ sur cet ensemble de couples telle que pour $f'_1 \in SI_{\lambda_1,cusp}(\tilde{U}'_{1,\epsilon_1})$, la condition que f'_1 soit invariante par l'automorphisme déterminé par x se traduise par l'égalité $S^{G'_1}(exp(Y')\epsilon_1, f'_1) = \Lambda_{g',x}(Y', Y)S^{G'_1}(exp(Y)\epsilon_1, f'_1)$ pour tout tel couple. En fait, la fonction $\Lambda_{g',x}$ est la restriction d'une fonction qui se transforme selon un caractère du groupe $G'_1(F) \times G'_1(F)$. Pour $\mathfrak{u}'_\epsilon$ assez petit, elle est donc constante, de valeur disons $\Lambda(g', x)$. Par descente, la condition précédente se traduit pour $f' \in SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon)$ par l'égalité $S^{G'_\epsilon}(ad_{g'} \circ \alpha_x(Y), f') = \Lambda(g', x)S^{G'_\epsilon}(Y, f')$ pour tout $Y \in \mathfrak{u}'_\epsilon$. Notons que, dans le cas $x = 1$, g' définit un élément de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$ et cette égalité n'est autre que la condition de transformation déjà introduite sous l'action de ce groupe. La formule précédente définit une action du groupe Aut_ϵ sur $SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon)$. On obtient

(7) l'image de l'application (6) est égale à $SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon)^{Aut_\epsilon}$, l'invariance étant bien sûr relative l'action définie ci-dessus.

Comme on l'a dit en 4.10, de la transformation de Fourier fixée sur $C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}}(F))$ se déduit une transformation de Fourier sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}'_\epsilon(F))$. On peut supposer la première invariante par toute action d'un élément de G. La seconde l'est alors par l'action de Aut_ϵ. Il en résulte que

(8) $SI_{cusp}(\mathfrak{g}'_\epsilon(F))^{Aut_\epsilon}$ est invariante par transformation de Fourier.

Pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et $f_y \in C_c^\infty(\mathfrak{u}_{\eta[y]})$, nous allons construire une fonction $\varphi_{\epsilon,y} \in C_c^\infty(\mathfrak{u}'_\epsilon)$. Par linéarité, on peut supposer que $f_y = f_{y,Z} \otimes f_{y,sc}$, avec $f_{y,Z} \in C_c^\infty(\mathfrak{z}_{G_{\eta[y]}}(F))$ et $f_{y,sc} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\eta[y],SC}(F))$. Les centres $Z(\bar{G})$ et $Z(G_{\eta[y]})$ s'identifient. On peut donc identifier $f_{y,Z}$ à une fonction sur $\mathfrak{z}_{\bar{G}}(F)$. La donnée $\bar{\mathbf{G}}'_\epsilon$ est aussi une donnée endoscopique de $G_{\eta[y],SC}$ donc $f_{y,sc}$ se transfère en une fonction disons ϕ_y sur $\bar{\mathfrak{g}}'_\epsilon(F)$. Par linéarité, on peut supposer $\phi_y = \phi_{y,Z} \otimes \phi_{y,sc}$, avec $\phi_{y,Z} \in C_c^\infty(\mathfrak{z}_{\bar{G}'_\epsilon}(F))$ et $\phi_{y,sc} \in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}}'_{\epsilon,SC}(F))$. Par endoscopie non standard, $\phi_{y,sc}$ se transfère en une fonction $\varphi_{\epsilon,y,sc} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}'_{\epsilon,SC}(F))$. Par les isomorphismes de 3.7, on a l'identification $\mathfrak{z}_{G'_\epsilon}(F) = \mathfrak{z}_{\bar{G}}(F) \oplus \mathfrak{z}_{\bar{G}'_\epsilon}(F)$. La fonction $f_{y,Z} \otimes \phi_{y,Z}$ s'identifie à une fonction $\varphi_{\epsilon,y,Z}$ sur $\mathfrak{z}_{G'_\epsilon}(F)$. On pose $\varphi_{\epsilon,y} = \varphi_{\epsilon,y,Z} \otimes \varphi_{\epsilon,y,sc}$. Il est (plus ou moins) clair que l'on peut effectuer les choix de sorte que cette fonction soit à support dans $\mathfrak{u}'_\epsilon$. L'utilité de cette construction est l'existence d'une famille $(c_{\epsilon,y})_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)}$ de nombres complexes non nuls telle que la propriété suivante soit vérifiée. Soit $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(F), \omega)$ (la condition de cuspidalité ne sert ici à rien mais peu importe). Soit $(f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)}$ son image par l'application (5). Soit $\varphi \in SI_{\lambda_1,cusp}(G'_1(F))$ le transfert de f et soit φ_ϵ la fonction sur $\mathfrak{u}'_\epsilon$ qui se déduit de φ par (6). Alors

(9) on a l'égalité suivante dans $SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon)$:

$$\varphi_\epsilon = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} c_{\epsilon,y}\varphi_{\epsilon,y}.$$

Cela résulte de la preuve de [W1] 3.11 (bien sûr, cela suppose que le voisinage $\bar{\mathfrak{u}}$ est assez petit).

Prouvons maintenant la surjectivité de (3). Le lemme 4.9 et un argument de partition de l'unité sur l'espace $\tilde{G}_{ss}(F)_{ell}/st-conj$ montrent que, pour prouver cette surjectivité, il suffit de prouver l'assertion suivante. Soient $(f_{\mathbf{G}'})_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} \in \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})}SI_{cusp}(\mathbf{G}')^{Aut(\mathbf{G}')}$ et $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)_{ell}$. Alors il existe $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$ telle que pour tout $(\mathbf{G}',\epsilon) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$, les intégrales orbitales stables de $f_{\mathbf{G}'}$ et du transfert $f^{\mathbf{G}'}$ de f (ces fonctions étant identifiées à des fonctions sur $\tilde{G}'_1(F)$) coïncident dans un voisinage de ϵ_1. On fixe η et on utilise les constructions ci-dessus. D'après les propriétés de l'application de descente (6), on peut aussi bien prouver l'assertion suivante. Soient $(\mathbf{G}',\epsilon) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$ et $\phi \in SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon)^{Aut_\epsilon}$. Alors il existe $f \in C_c^\infty(\tilde{U})$ dont les transferts $f^{\underline{\mathbf{G}}'}$ vérifient les deux conditions :

(10) l'image de $f^{\mathbf{G}'}$ par descente au voisinage de ϵ_1 a les mêmes intégrales orbitales stables que ϕ dans un voisinage de 0 ;

(11) pour $(\underline{\mathbf{G}}',\underline{\epsilon}) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$ différent de $(\mathbf{G}',\epsilon) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$, l'image de $f^{\underline{\mathbf{G}}'}$ par descente au voisinage de $\underline{\epsilon}_1$ a des intégrales orbitales stables nulles dans un voisinage de 0.

D'après 4.1(2), on peut trouver $\phi' \in SI_{cusp}(\mathfrak{u}'_\epsilon)$ à support régulier elliptique et tel que ϕ et $\hat{\phi}'$ aient mêmes intégrales orbitales stables au voisinage de 0. La propriété (8) nous permet de supposer que ϕ' est invariante par le groupe Aut_ϵ. On peut relever ϕ' en un élément $\varphi' \in SI_{\lambda_1,cusp}(\tilde{U}'_{1,\epsilon_1})^{Aut(\mathbf{G}')}$ à support régulier elliptique, et compléter φ' en un élément de $\oplus_{\underline{\mathbf{G}}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})}SI_{cusp}(\underline{\mathbf{G}}')^{Aut(\underline{\mathbf{G}}')}$, nul sur les autres composantes. D'après (4), c'est le transfert d'un élément $f' \in I_{ell}(\tilde{G}(F),\omega)$. Il est clair que l'on peut supposer $f' \in I_{cusp}(\tilde{U},\omega)$. Appliquons à f' les constructions précédant la formule (9), en les affectant d'un $'$. On obtient les deux propriétés suivantes :

- la fonction ϕ' a les mêmes intégrales orbitales stables que $\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} c_{\epsilon,y}\varphi'_{\epsilon,y}$;

- pour $(\underline{\mathbf{G}}',\underline{\epsilon}) \in \dot{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}}(\xi)$ différent de $(\mathbf{G}',\epsilon)$, la fonction $\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} c_{\underline{\epsilon},y}\varphi'_{\underline{\epsilon},y}$ a des intégrales orbitales stables nulles.

Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$, notons f_y la fonction $\gamma(\mathfrak{g}'_\epsilon)^{-1}\gamma(\mathfrak{g}_{\eta[y]})\hat{f}'_y$ restreinte à $\mathfrak{u}_{\eta[y]}$. D'après la description de l'image de (5), il existe $f \in I_{cusp}(\tilde{U},\omega)$ dont l'image par descente soit $(f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)}$. Soit $\varphi \in \oplus_{\underline{\mathbf{G}}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})}SI_{cusp}(\underline{\mathbf{G}}')^{Aut(\underline{\mathbf{G}}')}$ le transfert de f. On applique à f les constructions précédant la formule (9). D'après 4.10, toutes les fonctions issues de f se déduisent de celles issues de f' par transformation de Fourier et éventuellement multiplication par des constantes γ. On obtient que, pour $(\underline{\mathbf{G}}',\underline{\epsilon}) \in \dot{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}}(\eta)$, l'image par descente de $f^{\underline{\mathbf{G}}'}$ a les mêmes intégrales orbitales stables que

$$\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} c_{\underline{\epsilon},y}\varphi_{\underline{\epsilon},y},$$

ou encore que

$$\gamma(\underline{\mathfrak{g}}'_{\underline{\epsilon}})\gamma(\mathfrak{g}'_\epsilon)^{-1}\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} c_{\underline{\epsilon},y}\hat{\varphi}'_{\underline{\epsilon},y},$$

ou encore que $\hat{\phi}'$ si $(\underline{\mathbf{G}}',\underline{\epsilon}) = (\mathbf{G}',\epsilon)$, 0 sinon. D'après le choix de ϕ', f satisfait (10) et (11), ce qui achève la démonstration.

4.13 Preuve de la proposition 4.11 dans le cas réel

On reprend la preuve du cas non-archimédien. Son début reste pertinent. En adaptant les notations aux K-espaces tordus, il faut prouver que le transfert induit un isomorphisme

$$(1) \qquad I_{cusp}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \simeq \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(K\tilde{G},\mathbf{a})} SI_{cusp}(\mathbf{G}')^{Aut(\mathbf{G}')}.$$

Commençons par décrire l'espace $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. On a défini en 1.3 la notion de tore tordu maximal elliptique dans $\tilde{G}$. Notons que, pour un tore tordu maximal $\tilde{T}$, la condition d'ellipticité revient à dire que $(T^{\theta,0}/A_{\tilde{G}})(\mathbb{R})$ est compact. Il y a au plus un nombre fini de classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ de tores tordus maximaux elliptiques (j'ignore s'il y en a au plus un comme dans le cas non tordu). Fixons un ensemble de représentants $\tilde{\mathcal{T}}_{ell}$ des classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ parmi les tores tordus maximaux elliptiques $\tilde{T}$ tels que ω soit trivial sur $T^\theta(\mathbb{R})$. Cet ensemble peut être vide. Considérons l'application qui à $f\in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ associe la famille de fonctions $(\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}_{ell}}$, où $\varphi_{\tilde{T}}$ est la fonction définie sur les éléments fortement réguliers de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ par

$$\varphi_{\tilde{T}}(\gamma) = I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f).$$

Elle est injective. Une famille $(\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}_{ell}}$ dans l'image vérifie la condition

(2) pour tout $\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}_{ell}$, tout élément fortement régulier $\gamma\in\tilde{T}(\mathbb{R})$ et tout $g\in G(\mathbb{R})$ tel que $g\gamma g^{-1}\in\tilde{T}(\mathbb{R})$, on a $\varphi_{\tilde{T}}(g\gamma g^{-1}) = \omega(g)\varphi_{\tilde{T}}(\gamma)$.

Par descente d'Harish-Chandra, nos fonctions vérifient localement les conditions de régularité ou de saut habituelles dans cette théorie. Mais, parce que l'on considère ici des fonctions cuspidales, ces conditions se simplifient grandement. Soient $\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}_{ell}$ et $\eta\in\tilde{T}(\mathbb{R})$. Notons $\Sigma(T)_\eta$ l'ensemble des racines de $T^{\theta,0}$ dans G_η. Puisque $(T^{\theta,0}/A_{\tilde{G}})(\mathbb{R})$ est compact, toutes ces racines sont imaginaires. Fixons un sous-ensemble de racines positives et définissons une fonction Δ_η sur le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ qui sont réguliers dans G_η par la formule

$$\Delta_\eta(X) = \prod_{\alpha\in\Sigma(T)_\eta,\alpha>0} sgn(i\alpha(X)),$$

où sgn est le signe usuel d'un réel non nul. Cette fonction prend ses valeurs dans $\{\pm1\}$. On a simplement

(3) pour $\tilde{T}$ et η comme ci-dessus, la fonction $X\mapsto\Delta_\eta(X)\varphi_{\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$.

Inversement, la théorie de la descente montre que toute famille $(\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}_{ell}}$ vérifiant (2) et (3) est l'image d'un élément de $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Ce résultat se propage au K-espace $K\tilde{G}$. Pour $p\in\Pi$, on note plus précisément $\tilde{\mathcal{T}}_{ell,p}$ l'ensemble associé à la composante $\tilde{G}_p$. On pose $K\tilde{\mathcal{T}}_{ell} = \sqcup_{p\in\Pi}\tilde{\mathcal{T}}_{ell,p}$. On obtient que l'application

$$f\mapsto(\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in K\tilde{\mathcal{T}}_{ell}}$$

est injective et que son image est formée des familles vérifiant (2) et (3).

Soit $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(K\tilde{G},\mathbf{a})$. Fixons des données supplémentaires $G'_1,...,\Delta_1$ et identifions $C_c^\infty(\mathbf{G}')$ à $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$. Parce que $\tilde{G}'$ est à torsion intérieure, il y a au plus une classe de conjugaison par $G'(\mathbb{R})$ de tores tordus maximaux elliptiques dans $\tilde{G}'$. S'il n'y en a pas, il est clair que $SI_{cusp}(\mathbf{G}')$ est nul. Supposons qu'il existe un tel tore tordu maximal elliptique, fixons-en un que l'on note $\tilde{T}'$. Notons $\tilde{T}'_1$ son image réciproque dans $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$.

On considère l'application qui, à $f \in SI_{cusp}(\mathbf{G}')$, associe la fonction $\varphi_{\tilde{T}'_1}$ sur $\tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_{\tilde{T}'_1}(\delta_1) = S^{\tilde{G}'_1}(\delta_1, f)$ pour tout $\delta_1 \in \tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ fortement régulier. Cette application est injective. Un élément de l'image vérifie les conditions

(4) $\varphi_{\tilde{T}'_1}(c_1\delta_1) = \lambda_1(c_1)^{-1}\varphi_{\tilde{T}'_1}(\delta_1)$ pour tout $\delta_1 \in \tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ fortement régulier et tout $c_1 \in C_1(\mathbb{R})$;

(5) pour deux éléments $\delta_1, \delta'_1 \in \tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ fortement réguliers et stablement conjugués, $\varphi_{\tilde{T}'_1}(\delta'_1) = \varphi_{\tilde{T}'_1}(\delta_1)$.

De nouveau, par descente, la fonction vérifie localement les conditions établies par Shelstad. Puisqu'on travaille avec des fonctions cuspidales, ces conditions se simplifient. Soit $\epsilon \in \tilde{T}'(\mathbb{R})$. On définit comme ci-dessus une fonction Δ_ϵ sur l'ensemble des éléments $\mathfrak{t}'(\mathbb{R})$ qui sont réguliers dans G'_ϵ. On la remonte en une fonction définie presque partout sur $\mathfrak{t}'_1(\mathbb{R})$. Alors

(6) pour $\epsilon \in \tilde{T}'(\mathbb{R})$ et $\epsilon_1 \in \tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ au-dessus de ϵ, la fonction $Y \mapsto \Delta_\epsilon(Y)\varphi_{\tilde{T}'_1}(exp(Y)\epsilon_1)$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}'_1(\mathbb{R})$.

Inversement, une fonction vérifiant les conditions (4), (5) et (6) est dans l'image de $SI_{cusp}(\mathbf{G}')$, cf. [S1] théorème 12.1. On doit déterminer l'image du sous-espace des invariants par $Aut(\mathbf{G}')$. Notons $\tilde{T}'(\mathbb{R})_\sharp$ l'ensemble des éléments $\delta \in \tilde{T}'(\mathbb{R})$ tels que $N^{\tilde{G}',K\tilde{G}}(\delta)$ appartient à l'image de $K\tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$ par $N^{K\tilde{G}}$. Cet ensemble est ouvert et fermé (cela résulte des définitions). D'après le (iii) de la proposition 1.14, pour tout élément $\tilde{G}$-régulier $\delta \in \tilde{T}'(\mathbb{R})_\sharp$, il existe $\gamma \in K\tilde{G}(\mathbb{R})$ tel que $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}_{K\tilde{G}}$. Les définitions et le corollaire 2.6 entraînent que la condition d'invariance par $Aut(\mathbf{G}')$ se traduit simplement par les deux conditions suivantes :

(7) $\varphi_{\tilde{T}'_1}$ est nulle sur l'image réciproque de $\tilde{T}'(\mathbb{R})_\sharp$ dans $\tilde{T}'_1(\mathbb{R})$;

(8) pour deux éléments $\delta_1, \delta'_1 \in \tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ fortement réguliers pour lesquels il existe $\gamma \in K\tilde{G}(\mathbb{R})$ de sorte que (δ_1, γ) et (δ'_1, γ) appartiennent tous deux à $\mathcal{D}_{1,K\tilde{G}}$, on a l'égalité $\Delta_1(\delta'_1, \gamma)^{-1}\varphi_{\tilde{T}'_1}(\delta'_1) = \Delta_1(\delta_1, \gamma)^{-1}\varphi_{\tilde{T}'_1}(\delta_1)$.

Remarquons que cette condition implique (4) et (5).

Quand on se limite à des fonctions à support régulier elliptique, l'assertion 4.12(4) reste vraie sous la forme : le transfert définit un isomorphisme

$$(9) \qquad I_{ell}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \simeq \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(K\tilde{G}, \mathbf{a})} SI_{\tilde{G}-ell}(\mathbf{G}')^{Aut(\mathbf{G}')}.$$

Comme dans le cas non-archimédien, cela entraîne que le transfert est injectif sur $I_{cusp}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$.

Notons $\mathcal{E}(K\tilde{G}, \mathbf{a})_0$ l'ensemble des $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(K\tilde{G}, \mathbf{a})$ tels que $\tilde{G}'$ possède un sous-tore tordu elliptique. Comme on l'a déjà dit, il n'y a qu'une classe de conjugaison de tels sous-tores et on en fixe un que l'on note $\tilde{T}[\tilde{G}']$. Considérons une famille $(\varphi_{\tilde{T}[\tilde{G}']_1})_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(K\tilde{G}, \mathbf{a})_0}$, où, pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(K\tilde{G}, \mathbf{a})_0$, $\varphi_{\tilde{T}[\tilde{G}']_1}$ est une fonction sur $\tilde{T}[\tilde{G}']_1(\mathbb{R})$ (définie presque partout) vérifiant (6), (7) et (8). Nous allons en déduire une famille $(\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T} \in K\tilde{\mathcal{T}}_{ell}}$ où, pour tout $\tilde{T} \in K\tilde{\mathcal{T}}_{ell}$, $\varphi_{\tilde{T}}$ est une fonction définie presque partout sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$. Soient $\tilde{T} \in K\tilde{\mathcal{T}}_{ell}$ et $\gamma \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap K\tilde{G}_{reg}(F)$. On peut supposer que chaque élément de l'ensemble $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)$ de 4.9 est de la forme $(\mathbf{G}', \delta)$ où $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(K\tilde{G}, \mathbf{a})_0$ et $\delta \in \tilde{T}[\tilde{G}'](\mathbb{R})$. On pose alors

$$\varphi_{\tilde{T}}(\gamma) = [T^\theta(\mathbb{R}) : T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|\dot{\mathcal{X}}(\gamma)|^{-1}d(\theta^*)^{-1/2} \sum_{(\mathbf{G}', \delta) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)} \Delta_1(\delta_1, \gamma)^{-1}\varphi_{\tilde{T}[\tilde{G}']}(\delta_1),$$

cf. 4.9(5). Dans le cas où $(\varphi_{\tilde{T}[\tilde{G}']_1})_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(K\tilde{G}, \mathbf{a})_0}$ est à support régulier, c'est-à-dire provient d'un élément de $\oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(K\tilde{G}, \mathbf{a})} SI_{\tilde{G}-ell}(\mathbf{G}')^{Aut(\mathbf{G}')}$, la famille $(\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T} \in K\tilde{\mathcal{T}}_{ell}}$ provient de l'élément de $I_{ell}(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ qui correspond à cet élément par l'isomorphisme (9). Dans le cas général, les éléments de la famille $(\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in K\tilde{\mathcal{T}}_{ell}}$ vérifient (2) par construction. Pour démontrer la surjectivité de l'application (1), il suffit de prouver qu'ils vérifient aussi la condition (3). Pour cela, fixons $\tilde{T}\in K\tilde{\mathcal{T}}_{ell}$ et $\eta\in\tilde{T}(\mathbb{R})$. Introduisons l'ensemble $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$. Comme ci-dessus, on peut supposer que tout élément de cet ensemble est de la forme $(\mathbf{G}',\epsilon)$, où $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(K\tilde{G},\mathbf{a})_0$ et $\epsilon\in\tilde{T}[\tilde{G}'](\mathbb{R})$. On a même $\epsilon\in\tilde{T}[\tilde{G}'](\mathbb{R})_\sharp$ d'après 4.9(6). Soit $X_0\in\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ assez petit et régulier dans $\mathfrak{g}_\eta$. L'élément $\gamma_0=exp(X_0)\eta$ est elliptique et fortement régulier. Introduisons l'ensemble $\dot{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}}(\gamma_0)$ et, pour simplifier, indexons-le par un ensemble $\{1,...,n\}$ d'entiers. D'après la remarque suivant le lemme 4.9, on peut supposer que, pour $k=1,...,n$, le k-ième élément de $\dot{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}}(\gamma_0)$ est de la forme $(\mathbf{G}'_k,exp(Y_{k,0})\epsilon_k)$, où $(\mathbf{G}'_k,\epsilon_k)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\eta)$ et $Y_{k,0}$ est un élément régulier de $\mathfrak{g}'_{k,\epsilon_k}(\mathbb{R})$. Remarquons en passant que l'application $k\mapsto(\mathbf{G}'_k,\epsilon_k)$ n'est pas injective en général. Notons $\tilde{T}'_k=\tilde{T}[\tilde{G}'_k]$. L'élément $Y_{k,0}$ est elliptique. Puisque T'_k est, à conjugaison près, l'unique sous-tore elliptique de G'_{k,ϵ_k}, on peut supposer $Y_{k,0}\in\mathfrak{t}'_k(\mathbb{R})$. D'un diagramme reliant $exp(Y_{k,0})\epsilon_k$ à $exp(X_0)\eta$ se déduit alors un isomorphisme $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})\simeq\mathfrak{t}'_k(\mathbb{R})$ qui envoie X_0 sur $Y_{k,0}$. En fixant une section $\mathfrak{t}'_k(\mathbb{R})\to\mathfrak{t}'_{k,1}(\mathbb{R})$ de la projection naturelle, on obtient un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{t}'_{k,1}(\mathbb{R})\\ X & \mapsto & Y_k\end{array}$$

Soit $X\in\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$, assez petit et régulier dans $\mathfrak{g}_\eta$, et posons $\gamma=exp(X)\eta$. Il est (plus ou moins) clair que l'on peut prendre pour ensemble $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)$ l'ensemble des $(\mathbf{G}'_k,exp(Y_k)\epsilon_k)$ pour $k=1,...,n$. En appliquant la définition ci-dessus, on obtient

$$\varphi_{\tilde{T}}(exp(X)\eta)=d(\theta^*)^{-1/2}[T^\theta(\mathbb{R}):T^{\theta,0}(\mathbb{R})]|\dot{\mathcal{X}}(\gamma_0)|^{-1}$$
$$\sum_{k=1,...,n}\Delta_1(exp(Y_k)\epsilon_{k,1},exp(X)\eta)^{-1}\varphi_{\tilde{T}'_{k,1}}(exp(Y_k)\epsilon_{k,1}).$$

On veut prouver que la fonction $X\mapsto\Delta_\eta(X)\varphi_{\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de 0. On sait d'après (6) que, pour tout k, la fonction $Y\mapsto\Delta_{\epsilon_k}(Y)\varphi_{\tilde{T}'_{k,1}}(exp(Y)\epsilon_{k,1})$ se prolonge en une telle fonction. Il suffit donc de prouver que, pour tout k, la fonction

$$X\mapsto\Delta_\eta(X)\Delta_{\epsilon_k}(Y_k)^{-1}\Delta_1(exp(Y_k)\epsilon_{k,1},exp(X)\eta)^{-1}$$

se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de 0. C'est ce que fait Shelstad dans [S1], dans une situation plus générale. Puisque l'on est ici dans un cas beaucoup plus simple, redonnons l'argument. Pour simplifier, on fixe k et on abandonne les indices k. Il existe une constante $c\neq0$ telle que

$$\Delta_1(exp(Y)\epsilon_1,exp(X)\eta)=c\boldsymbol{\Delta}_1(exp(Y)\epsilon_1,exp(X)\eta;exp(Y_0)\epsilon_1,exp(X_0)\eta).$$

Il est clair que le facteur $\Delta_{imp}(exp(Y)\epsilon_1,exp(X)\eta;exp(Y_0)\epsilon_1,exp(X_0)\eta)^{-1}$ est C^∞ au voisinage de 0. Cela nous ramène à considérer la fonction

$$X\mapsto\Delta_\eta(X)\Delta_\epsilon(Y)^{-1}\Delta_{II}(exp(Y)\epsilon,exp(X)\eta)^{-1}.$$

Utilisons les notations de 1.6 et 2.2. Le terme ν de 2.2 est de la forme $exp(X)\nu_\eta$. On a décrit en [W1] 3.3 l'ensemble de racines $\Sigma(T)_\eta$ du groupe G_η. C'est

$$\Sigma(T)_\eta=\{\alpha_{res};\alpha\in\Sigma(T),\ \alpha\text{ de type 1 ou 2 },(N\alpha)(\nu_\eta)=1\}$$

$$\cup\{2\alpha_{res};\alpha\in\Sigma(T),\ \alpha \text{ de type } 2\ ,(N\alpha)(\nu_\eta)=-1\}.$$

On a aussi décrit l'ensemble de racines $\Sigma(T')_\epsilon$ du groupe G'_ϵ. C'est

$$\Sigma(T')_\epsilon=\{N\alpha;\alpha\in\Sigma(T),\ \alpha \text{ de type } 1,(N\hat{\alpha})(s)=1,\ (N\alpha)(\nu_\eta)=1\}$$

$$\cup\{2N\alpha;\alpha\in\Sigma(T),\ \alpha \text{ de type } 2,(N\hat{\alpha})(s)=1,\ (N\alpha)(\nu_\eta)=\pm1\}$$

$$\cup\{N\alpha;\alpha\in\Sigma(T),\ \alpha \text{ de type } 2,(N\hat{\alpha})(s)=-1,\ (N\alpha)(\nu_\eta)=1\}.$$

Puisque $(T^{\theta,0}/A_{\tilde{G}})(\mathbb{R})$ est elliptique, la conjugaison complexe agit sur $\Sigma(T)_{res,ind}$ par multiplication par -1. Fixons un ensemble $\Sigma_\star$ de représentants des orbites. Dans les définitions de Δ_η et Δ_ϵ, on peut remplacer les sous-ensembles de racines positives par des ensembles de représentants d'orbites pour la conjugaison complexe, cela ne change ces fonctions que par des constantes. On peut supposer que ce sont les ensembles déduits de ceux ci-dessus en ajoutant la condition $\alpha_{res}\in\Sigma_\star$. Chacune des nos fonctions $\Delta_\eta(X)$, $\Delta_\epsilon(Y)^{-1}$ et $\Delta_{II}(exp(Y)\epsilon,exp(X)\eta)^{-1}$ est un produit indexé par $\alpha_{res}\in\Sigma_\star$. Le terme indexé par α_{res} est donné par le tableau suivant

type de α	$(N\alpha)(\nu_\eta)$	$(N\hat{\alpha})(s)$	$\Delta_\eta(X)$	$\Delta_\epsilon(Y)^{-1}$	$\Delta_{II}(exp(Y)\epsilon,exp(X)\eta)^{-1}$
1	1	1	$sgn(i\alpha_{res}(X))$	$sgn(i(N\alpha)(Y))$	1
1	1	$\neq 1$	$sgn(i\alpha_{res}(X))$	1	$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{a_{\alpha_{res}}}{(N\alpha)(\nu)-1})$
1	$\neq 1$	1	1	1	1
1	$\neq 1$	$\neq 1$	1	1	$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{a_{\alpha_{res}}}{(N\alpha)(\nu)-1})$
2	1	1	$sgn(i\alpha_{res}(X))$	$sgn(2i(N\alpha)(Y))$	1
2	1	-1	$sgn(i\alpha_{res}(X))$	$sgn(i(N\alpha)(Y))$	$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{1}{(N\alpha)(\nu)+1})$
2	1	$\neq\pm1$	$sgn(i\alpha_{res}(X))$	1	$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{a_{\alpha_{res}}}{(N\alpha)(\nu)^2-1})$
2	-1	1	$sgn(2i\alpha_{res}(X))$	$sgn(2i(N\alpha)(Y))$	1
2	-1	-1	$sgn(2i\alpha_{res}(X))$	1	$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{1}{(N\alpha)(\nu)+1})$
2	-1	$\neq\pm1$	$sgn(2i\alpha_{res}(X))$	1	$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{a_{\alpha_{res}}}{(N\alpha)(\nu)^2-1})$
2	$\neq\pm1$	1	1	1	1
2	$\neq\pm1$	-1	1	1	$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{1}{(N\alpha)(\nu)+1})$
2	$\neq\pm1$	$\neq\pm1$	1	1	$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{a_{\alpha_{res}}}{(N\alpha)(\nu)^2-1})$

On peut choisir les a-data et les χ-data de sorte que, pour tout $\alpha_{res}\in\Sigma_\star$, $a_{\alpha_{res}}=i$ et $\chi_{\alpha_{res}}(z)=z/|z|$. On vérifie alors que, dans chaque cas, le produit des trois contributions ci-dessus est C^∞ au voisinage de $X=0$. Par exemple, considérons le cas α de type 2, $(N\alpha)(\nu_\eta)=1$ et $(N\hat{\alpha})(s)=1$. L'homomorphisme $X\mapsto Y$ identifie $N\alpha$ à $n_\alpha\alpha_{res}$, où n_α est le plus petit entier $n\geq1$ tel que $\theta^n(\alpha)=\alpha$. Donc $sgn(2i(N\alpha)(Y))=sgn(i\alpha_{res}(X))$ et le produit de ces deux termes vaut 1. Considérons maintenant le cas α de type 2, $(N\alpha)(\nu_\eta)=1$ et $(N\hat{\alpha})(s)\neq\pm1$. On a $(N\alpha)(\nu)^2=exp(2(N\alpha)(X))(N\alpha)(\nu_\eta)^2=exp(2n_\alpha\alpha_{res}(X))$ d'où

$$\chi_{\alpha_{res}}(\frac{a_{\alpha_{res}}}{(N\alpha)(\nu)^2-1})=i|exp(2n_\alpha\alpha_{res}(X))-1|(exp(2n_\alpha\alpha_{res}(X)-1)^{-1}.$$

Le produit de cette expression avec $sgn(i\alpha_{res}(X))$ est C^∞ au voisinage de 0. On laisse les autres cas au lecteur. Cela achève la preuve.

4.14 Un corollaire de la preuve dans le cas réel

Le corps de base est $\mathbb{R}$. On suppose $(G, \tilde{G}, \omega)$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Notons $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ le sous-espace des $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tels que la fonction $\gamma \mapsto I^{\tilde{G}}(\gamma, f)$ est constante sur les classes de conjugaison stable formées d'éléments fortement réguliers et elliptiques.

Lemme. *L'application naturelle $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est un isomorphisme.*

Remarque. Ce lemme vaut aussi sur un corps F non-archimédien mais, dans ce cas, c'est une conséquence directe de la proposition 4.11. Dans le cas présent où le corps de base est $\mathbb{R}$, cette proposition ne s'applique qu'à un K-espace. Ici, nous considérons un seul espace $\tilde{G}$.

Preuve. On peut supposer que $\tilde{G}$ contient un tore tordu maximal elliptique, sinon les deux espaces sont nuls. Puisque $\tilde{G}$ est à torsion intérieure, il n'en contient qu'un à conjugaison près. On en fixe un, que l'on note $\tilde{T}$. L'espace $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, resp. $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, s'identifie à celui des fonctions $\varphi_{\tilde{T}}$ définies presque partout sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$ qui vérifient les conditions (2) et (3) du paragraphe précédent, resp. (5) et (6) (la condition (4) est triviale en identifiant $SI(\mathbf{G})$ à $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$). On voit que ces deux dernières conditions sont équivalentes à la réunion des deux premières et de la condition : $\varphi_{\tilde{T}}$ est constante sur les classes de conjugaison stable formées d'éléments fortement réguliers et elliptiques. Il en résulte que $\varphi_{\tilde{T}} \in SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ si et seulement si $\varphi_{\tilde{T}} \in I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On n'a pas tout-à-fait fini car l'application naturelle $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ ne se traduit pas par l'identité en termes de fonctions sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$, mais par l'application $\varphi_{\tilde{T}} \mapsto \varphi_{\tilde{T}}^{\mathbf{G}}$ définie par

$$\varphi_{\tilde{T}}^{\mathbf{G}}(\delta) = \sum_{\gamma} \varphi_{\tilde{T}}(\gamma),$$

où on somme sur les $\gamma \in \tilde{T}(\mathbb{R})$ stablement conjugués à δ, à conjugaison près par $G(\mathbb{R})$. Il reste à voir que le nombre de ces éléments γ ne dépend pas de δ, pourvu que δ soit fortement régulier. Mais ce nombre est égal au nombre d'éléments de l'ensemble

$$T(\mathbb{C})\backslash\{g \in G(\mathbb{C}); g\sigma(g)^{-1} \in T(\mathbb{C}) \text{ pour tout } \sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}\}/G(\mathbb{R}).$$

Cela achève la preuve. $\square$

4.15 Filtration de l'espace $SI(\tilde{G}(F))$

On suppose $(G, \tilde{G}, \omega)$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On a filtré en 4.2 l'espace $I(\tilde{G}(F))$. Il y a deux filtrations naturelles sur $SI(\tilde{G}(F))$. Pour un entier $n \geq -1$, notons $\mathcal{F}^n SI(\tilde{G}(F))$ le sous-espace des $f \in SI(\tilde{G}(F))$ tels que $f_{\tilde{M}} = 0$ pour tout espace de Levi $\tilde{M}$ tel que $a_{\tilde{M}} > n$. Ces espaces forment l'une des filtrations. On note $GrSI(\tilde{G}(F))$ le gradué associé. On peut d'autre part considérer l'image de la filtration de $I(\tilde{G}(F))$ par la projection naturelle de cet espace sur $SI(\tilde{G}(F))$. Autrement dit, si on note $I^{inst}(\tilde{G}(F))$ le noyau de cette projection, les termes de la filtration sont les espaces

$$(\mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F)) + I^{inst}(\tilde{G}(F)))/I^{inst}(\tilde{G}(F)).$$

Il est clair que l'espace ci-dessus est inclus dans $\mathcal{F}^n SI(\tilde{G}(F))$.

Lemme. *Pour tout n, on a les égalités :*

$$(\mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F)) + I^{inst}(\tilde{G}(F)))/I^{inst}(\tilde{G}(F)) = \mathcal{F}^n SI(\tilde{G}(F)$$

et

$$Gr^n SI(\tilde{G}(F) = \oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n} SI_{cusp}(\tilde{M}(F))^{W(\tilde{M})}.$$

Preuve. Notons pour simplifier E^n l'espace de gauche de la première égalité. On raisonne par récurrence et on suppose prouvé que $E^{n-1} = \mathcal{F}^{n-1}SI(\tilde{G}(F))$. Puisque $E^n \subset \mathcal{F}^n SI(\tilde{G}(F))$, on a alors une injection

$$(1) \qquad E^n/E^{n-1} \subset Gr^n SI(\tilde{G}(F)).$$

Il s'agit de voir qu'elle est surjective. Le premier espace est quotient de $Gr^n I(\tilde{G}(F))$, ou encore, en utilisant le lemme 4.2, de

$$\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n} I_{cusp}(\tilde{M}(F))^{W(\tilde{M})}.$$

Par définition, l'espace $Gr^n SI(\tilde{G}(F))$ s'envoie injectivement dans

$$\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n} SI_{cusp}(\tilde{M}(F))^{W(\tilde{M})}.$$

L'homomorphisme (1) composé avec cette injection se quotiente en l'homomorphisme naturel

$$\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n} I_{cusp}(\tilde{M}(F))^{W(\tilde{M})} \to \oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n} SI_{cusp}(\tilde{M}(F))^{W(\tilde{M})}.$$

Pour prouver les deux assertions de l'énoncé, il suffit de prouver que ce dernier est surjectif. Mais c'est un cas particulier de l'assertion 4.12(3) dans le cas non archimédien et c'est le lemme 4.14 dans le cas réel (le cas complexe est trivial). □

Comme toujours, il y a une variante de ce résultat quand on considère des extensions centrales comme à la fin du paragraphe 4.8.

4.16 Un corollaire

On suppose encore $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $(\tilde{M}_j)_{j=1,...,k}$ une famille finie d'espaces de Levi de $\tilde{G}$. Considérons l'application linéaire

$$res = \oplus_{j=1,...,k} res_{\tilde{M}_j} : I(\tilde{G}(F)) \to \oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(F)).$$

Corollaire. *On a l'égalité*

$$res(I(\tilde{G}(F))) \cap \left(\oplus_{j=1,...,k} I^{inst}(\tilde{M}_j(F))\right) = res(I^{inst}(\tilde{G}(F))).$$

Preuve. Posons

$$I = \oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(F)),\ I^{inst} = \oplus_{j=1,...,k} I^{inst}(\tilde{M}_j(F))$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}^n I = \oplus_{j=1,...,k} \mathcal{F}^n I(\tilde{M}_j(F))$. On va prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1) \qquad res(\mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F))) \cap I^{inst} \subset res(I^{inst}(\tilde{G}(F))) + (res(\mathcal{F}^{n-1} I(\tilde{G}(F))) \cap I^{inst}).$$

Posons $\mathcal{F}^n I^{inst}(\tilde{G}(F)) = I^{inst}(\tilde{G}(F)) \cap \mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F))$. On note $GrI^{inst}(\tilde{G}(F))$ le gradué associé à cette filtration. En conséquence du lemme 4.15, la suite

$$0 \to Gr^n I^{inst}(\tilde{G}(F)) \to Gr^n I(\tilde{G}(F)) \to Gr^n SI(\tilde{G}(F)) \to 0$$

est exacte. Donc $Gr^n I^{inst}(\tilde{G}(F))$ est l'espace des $(f^{\tilde{L}})_{\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n} \in \oplus_{\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n} I_{cusp}(\tilde{L}(F))^{W(\tilde{L})}$ tels que les images de $f^{\tilde{L}}$ dans $SI_{cusp}(\tilde{L}(F))$ soient nulles pour tout $\tilde{L}$. Soit $f \in \mathcal{F}^n I(\tilde{G}(F))$ tel que $res(f) \in I^{inst}$. Soit $(f^{\tilde{L}})_{\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n}$ son image dans $\oplus_{\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n} I_{cusp}(\tilde{L}(F))^{W(\tilde{L})}$. Notons $\underline{\mathcal{L}}^n_\star$ l'ensemble des $\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n$ qui sont conjugués par $G(F)$ à un espace inclus dans l'un des $\tilde{M}_j$. L'hypothèse $res(f) \in I^{inst}$ entraîne que, si $\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n_\star$, l'image de $f^{\tilde{L}}$ dans $SI_{cusp}(\tilde{L}(F))$ est nulle. Par le résultat précédent, on peut trouver $f_0 \in \mathcal{F}^n I^{inst}(\tilde{G}(F))$ dont l'image $(f_0^{\tilde{L}})_{\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n}$ dans le gradué vérifie $f_0^{\tilde{L}} = f^{\tilde{L}}$ si $\tilde{L} \in \underline{\mathcal{L}}^n_\star$, $f_0^{\tilde{L}} = 0$ sinon. Alors, pour tout $j = 1, ..., k$, l'image de $res_{\tilde{M}_j}(f - f_0)$ dans $Gr^n I(\tilde{M}_j(F))$ est nulle. Autrement dit $res(f - f_0) \in \mathcal{F}^{n-1} I$. D'après la preuve du lemme 4.3, $res(I(\tilde{G}(F))) \cap \mathcal{F}^{n-1} I = res(\mathcal{F}^{n-1} I(\tilde{G}(F)))$. Il existe donc $f' \in \mathcal{F}^{n-1} I(\tilde{G}(F))$ tel que $res(f - f_0 - f') = 0$. On a encore $res(f') \in I^{inst}$. L'égalité $res(f) = res(f_0) + res(f')$ montre que $res(f)$ appartient au membre de droite de (1). Cela prouve cette relation.

Par récurrence sur n, (1) implique que le membre de gauche de l'énoncé est inclus dans celui de droite. L'inclusion opposée étant évidente, cela démontre le corollaire. □

4.17 Produit scalaire

Dans ce paragraphe, on suppose ω unitaire. On munit $G(F)$ d'une mesure de Haar. On doit aussi munir $A_{\tilde{G}}(F)$ d'une telle mesure. Par souci de cohérence avec [W3], on procède ainsi. On munit l'espace vectoriel réel $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ d'une mesure de Haar. On dispose de l'homomorphisme habituel

$$H_{A_{\tilde{G}}} : A_{\tilde{G}}(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}.$$

Pour $a \in A_{\tilde{G}}(F)$ et $x^* \in X^*(A_{\tilde{G}})$, on a $|x^*(a)|_F = e^{<x^*, H_{A_{\tilde{G}}}(a)>}$. Notons $A_{\tilde{G}}(F)^c$ le noyau de $H_{A_{\tilde{G}}}$. C'est le sous-groupe compact maximal de $A_{\tilde{G}}(F)$. Si F est non-archimédien, l'image $Im(H_{A_{\tilde{G}}})$ de l'homomorphisme $H_{A_{\tilde{G}}}$ est un réseau de $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$, tandis que $A_{\tilde{G}}(F)^c$ est un sous-groupe ouvert de $A_{\tilde{G}}(F)$. On munit $A_{\tilde{G}}(F)$ de la mesure de Haar telle que $mes(A_{\tilde{G}}(F)^c) = mes(\mathcal{A}_{\tilde{G}}/Im(H_{A_{\tilde{G}}}))$. Si F est archimédien, on munit $A_{\tilde{G}}(F)^c$ de la mesure de Haar de masse totale 1. La suite

$$1 \to A_{\tilde{G}}(F)^c \to A_{\tilde{G}}(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}} \to 0$$

est exacte et on munit $A_{\tilde{G}}(F)$ de la mesure compatible avec cette suite et avec les mesures déjà fixées sur les deux autres groupes.

Commençons par supposer F non-archimédien. Pour tout sous-tore tordu maximal $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$, munissons $T^{\theta,0}(F)$ d'une mesure de Haar. Notons $\tilde{G}_{reg}(F)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble $\tilde{G}_{reg}(F)$. Pour $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$, l'application

$$\begin{array}{ccc} G_\gamma(F) & \to & \tilde{G}_{reg}(F)/conj \\ t & \mapsto & classe(t\gamma) \end{array}$$

est injective dans un voisinage de 1. On munit $\tilde{G}_{reg}(F)/conj$ de la topologie (ou de la structure de variété analytique sur F) et de la mesure telle que, pour tout γ, cette application soit, au voisinage de 1, un isomorphisme préservant la mesure. On a alors la formule d'intégration, pour $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$:

$$\int_{\tilde{G}(F)} f(\gamma)d\gamma = \int_{\tilde{G}_{reg}(F)/conj}\Phi(\gamma,f)D^{\tilde{G}}(\gamma)d\gamma,$$

où

$$\Phi(\gamma,f)=\int_{Z_G(\gamma;F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)dg.$$

Soient $f_1,f_2\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, supposons les supports de f_1 et f_2 contenus dans l'ensemble $\tilde{G}(F)_{ell}$ des éléments elliptiques réguliers de $\tilde{G}(F)$. On pose

$$(1)\qquad J_{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)=\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)}\int_{\tilde{G}(F)}\overline{f_1(\gamma)}f_2(g^{-1}\gamma g)d\gamma\omega(g)dg.$$

Cette intégrale est absolument convergente et on a

$$(2)\qquad J_{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)=\int_{\tilde{G}(F)_{ell}/conj} i(\gamma)^{-1}mes(A_{\tilde{G}}(F)\backslash G_\gamma(F))\overline{I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_1)}I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_2)d\gamma,$$

où on a posé $i(\gamma)=[Z_G(\gamma;F):G_\gamma(F)]$ et où on rappelle la définition

$$I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=\begin{cases} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2}\int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)}\omega(g)f(g^{-1}\gamma g)dg, & \text{si } \omega \text{ est trivial sur } Z_G(\gamma;F)\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}.$$

Dans la formule (2), on peut considérer que f_1 et f_2 ne sont plus des fonctions sur $\tilde{G}(F)_{ell}$ mais sont plutôt leurs images dans $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$. Cela définit un produit hermitien sur un sous-espace de $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$, à savoir l'image de l'espace des fonctions à support elliptique régulier. Il résulte de la formule des traces locale que la même formule (2) s'étend en un produit hermitien sur tout l'espace $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$ (c'est-à-dire que cette formule reste absolument convergente), cf. [W3] 6.6(1).

Considérons le cas particulier où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. On dispose de la donnée endoscopique maximale $\mathbf{G}$ pour laquelle $SI(\mathbf{G})=SI(\tilde{G}(F))$. On a aussi $SI_{cusp}(\mathbf{G})=SI_{cusp}(\tilde{G}(F))$. La proposition 4.11 identifie cet espace à un sous-espace de $I_{cusp}(\tilde{G}(F))$. C'est le sous-espace des $f\in I_{cusp}(\tilde{G}(F))$ dont les intégrales orbitales sont constantes sur toute classe de conjugaison stable fortement régulière. Le produit hermitien ci-dessus se restreint en un tel produit sur ce sous-espace. Notons $\tilde{G}(F)_{ell}$ l'ensemble des éléments fortement réguliers et elliptiques de $\tilde{G}(F)$ et $\tilde{G}(F)_{ell}/st-conj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable contenues dans $\tilde{G}(F)_{ell}$. Par le même procédé que ci-dessus, on le munit d'une topologie et d'une mesure. Pour $f_1,f_2\in SI(\tilde{G}(F))$, on a l'égalité

$$(3)\qquad J_{\tilde{G}}(f_1,f_2)=\int_{\tilde{G}(F)_{ell}/st-conj} k(\delta)^{-1}mes(A_{\tilde{G}}(F)\backslash G_\delta(F))\overline{S^{\tilde{G}}(\delta,f_1)}S^{\tilde{G}}(\delta,f_2)d\delta$$

où, pour toute classe de conjugaison stable δ, on a noté $k(\delta)$ le nombre de classes de conjugaison par $G(F)$ contenues dans δ. Remarquons que les centralisateurs sont connexes dans le cas où la torsion est intérieure.

Revenons au cas général, soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s}) \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$. On peut choisir des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 de sorte que le caractère λ_1 soit unitaire. Pour $f_1, f_2 \in SI_{\lambda_1,cusp}(\tilde{G}'_1(F))$, la fonction

$$\delta_1 \mapsto \overline{S^{\tilde{G}'_1}(\delta_1, f_1)} S^{\tilde{G}'_1}(\delta_1, f_2)$$

sur $\tilde{G}'_1(F)_{ell}$ se descend en une fonction de $\delta \in \tilde{G}'(F)_{ell}/st-conj$. Modulo les choix de mesures de Haar sur $G'(F)$ et $\mathcal{A}_{G'}$ (de cette dernière se déduisant une mesure sur $A_{G'}(F)$ comme plus haut), on peut donc définir le produit $J_{\tilde{G}'}(f_1, f_2)$ par la formule (3) où $\tilde{G}$ est remplacé par $\tilde{G}'$. Quand on change de données auxiliaires, ces formules se recollent et on obtient un produit hermitien $J_{\mathbf{G}'}$ sur l'espace $SI_{cusp}(\mathbf{G}')$.

On suppose maintenant fixées des mesures de Haar sur $G(F)$, sur $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ et sur $G'(F)$ pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$. Pour tout tel $\mathbf{G}'$, on a un isomorphisme naturel $\mathcal{A}_{\tilde{G}} \to \mathcal{A}_{G'}$. On munit $\mathcal{A}_{G'}$ de la mesure telle que cet isomorphisme préserve les mesures. On pose

$$c(\tilde{G}, \mathbf{G}') = det((1-\theta)_{|\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}})|^{-1} |\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})|^{-1}|$$

$$|Out(\mathbf{G}')|^{-1} |\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0} \cap \hat{G}')||\pi_0((Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{G}'))^{\Gamma_F})|^{-1}.$$

La proposition 4.11 nous fournit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} I_{cusp}(\tilde{G}(F), \omega) & \simeq & \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})} SI_{cusp}(\mathbf{G}')^{Aut(\mathbf{G}')} \\ f & \mapsto & (f^{\mathbf{G}'})_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})} \end{array}.$$

Chaque espace est muni d'un produit hermitien.

On a supposé le corps F non-archimédien. Dans le cas où F est réel, toutes ces constructions s'adaptent aux K-espaces. Le produit hermitien sur $I_{cusp}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ est la somme directe des produits sur les différents $I_{cusp}(\tilde{G}_p(\mathbb{R}), \omega)$. Attention : dans la formule (3), $k(\delta)$ est un nombre de classes de conjugaison dans un K-espace associé à $\tilde{G}'$.

Proposition. *Soient $\underline{f}, f \in I_{cusp}(\tilde{G}(F), \omega)$. Alors on a l'égalité*

$$J_{\tilde{G}}(\omega, \underline{f}, f) = \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})} c(\tilde{G}, \mathbf{G}') J_{\mathbf{G}'}(\underline{f}^{\mathbf{G}'}, f^{\mathbf{G}'}).$$

Remarque. La démonstration s'inspire de celle du lemme 6.4.B de [KS1].

Preuve. Tous nos espaces d'intégration sont des revêtements de l'espace $\tilde{G}(F)_{ell}/st-conj$, cf. 4.9(7). Les mesures sur nos espaces dépendent de choix de mesures sur les tores. Si on impose à ces choix la même condition qu'en 2.4 (les mesures sur deux tores se correspondent localement quand il y a un isomorphisme naturel entre ces deux tores), les revêtements préservent localement les mesures. L'égalité de l'énoncé résulte d'une égalité plus forte : quand on considère les deux côtés de la formule comme des intégrales sur $\tilde{G}(F)_{ell}/st-conj$, les fonctions que l'on intègre sont égales. C'est ce que l'on va prouver. Fixons $\gamma \in \tilde{G}(F)_{ell}$ et considérons les valeurs de nos fonctions sur la classe de conjugaison stable de γ. Si ω n'est pas trivial sur $Z_G(\gamma; F)$, ces deux valeurs sont nulles. On suppose ω trivial sur $Z_G(\gamma; F)$. Pour $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$, le groupe $Out(\mathbf{G}')$ agit librement sur l'ensemble des éléments de $\tilde{G}'(F)_{ell}/st-conj$ qui se projettent sur cette classe de conjugaison stable. L'ensemble $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)$ est un ensemble de représentants de ces orbites. La fonction du membre de droite vaut donc

$$(4) \qquad \sum_{(\mathbf{G}',\delta) \in \dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)} c(\tilde{G}, \mathbf{G}')|Out(\mathbf{G}')|k(\delta)^{-1} mes(A_{G'}(F) \backslash G_\delta(F)) \overline{S^{\mathbf{G}'}(\delta, \underline{f}^{\mathbf{G}'})} S^{\mathbf{G}'}(\delta, f^{\mathbf{G}'}).$$

Celle du membre de gauche vaut

$$i(\gamma)^{-1}mes(A_{\tilde{G}}(F)\backslash G_\gamma(F))\sum_{\gamma'\in\dot{\mathcal{X}}(\gamma)}\overline{I^{\tilde{G}}(\gamma',\underline{f})}I^{\tilde{G}}(\gamma',f).$$

En utilisant la formule 4.9(5) qui exprime l'inverse du transfert et en se rappelant que $|\dot{\mathcal{X}}(\gamma)|=k(\gamma)$ on transforme cette expression en

$$d(\theta^*)^{-1}k(\gamma)^{-2}mes(A_{\tilde{G}}(F)\backslash Z_G(\gamma;F))\sum_{\gamma'\in\dot{\mathcal{X}}(\gamma)}\sum_{(\underline{\mathbf{G}'},\underline{\delta}),(\mathbf{G}',\delta)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)}$$

$$\overline{\underline{\Delta}_1(\underline{\delta}_1,\gamma')}^{-1}\Delta_1(\delta_1,\gamma')^{-1}\overline{S^{\underline{\mathbf{G}}'}(\underline{\delta},\underline{f}^{\underline{\mathbf{G}}'})}S^{\mathbf{G}'}(\delta,f^{\mathbf{G}'}).$$

Comme on le sait, la formule 4.9(5) exprime essentiellement une transformation de Fourier, les ensembles $\dot{\mathcal{X}}(\gamma)$et $\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)$ pouvant être muni de structures de groupes abéliens finis pour lesquelles ils sont duaux. La somme en γ' des produits de facteurs de transfert vaut $|\dot{\mathcal{X}}(\gamma)|$, c'est-à-dire $k(\gamma)$, si $(\underline{\mathbf{G}'},\underline{\delta})=(\mathbf{G}',\delta)$, 0 sinon. On obtient

$$d(\theta^*)^{-1}k(\gamma)^{-1}mes(A_{\tilde{G}}(F)\backslash Z_G(\gamma;F))\sum_{(\mathbf{G}',\delta)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)}\overline{S^{\mathbf{G}'}(\delta,\underline{f}^{\mathbf{G}'})}S^{\mathbf{G}'}(\delta,f^{\mathbf{G}'}).$$

On veut prouver que cette expression est égale à (4). Il suffit de prouver que, pour tout $(\mathbf{G}',\delta)\in\dot{\mathcal{X}}^{\mathcal{E}}(\gamma)$, on a l'égalité

(5) $$c(\tilde{G},\mathbf{G}')=|Out(\mathbf{G}')|^{-1}k(\delta)mes(A_{G'}(F)\backslash G_\delta(F))^{-1}d(\theta^*)^{-1}k(\gamma)^{-1}mes(A_{\tilde{G}}(F)\backslash Z_G(\gamma;F)).$$

On note $c_?(\tilde{G},\mathbf{G}')$ le membre de droite de cette relation. Notons T le centralisateur de G_γ dans G et $T'=G_\delta$. On a $G_\gamma=T^{\theta,0}$, $Z_G(\gamma)=T^\theta$ et $T'=T/(1-\theta)(T)$. De l'homomorphisme $\xi_{T,T'}$ se déduit un homomorphisme

$$a:A_{\tilde{G}}(F)\backslash T^\theta(F)\to A_{G'}(F)\backslash T'(F).$$

L'homomorphisme $\xi_{T,T'}:T^\theta(F)\to T'(F)$ conserve localement les mesures. Par contre, sa restriction $c:A_{\tilde{G}}(F)\to A_{G'}(F)$ ne les conserve pas. Notons m' la mesure sur $A_{G'}(F)$ tel que c conserve localement les mesures et C la constante telle que notre mesure sur $A_{G'}(F)$ soit Cm'. On obtient alors

$$mes(A_{\tilde{G}}(F)\backslash T^\theta(F))=C\,mes(Im(a))|Ker(a)|.$$

On a aussi

$$mes(A_{G'}(F)\backslash T'(F))=mes(Im(a))|Coker(a)|.$$

D'où

$$c_?(\tilde{G},\mathbf{G}')=C|Out(\mathbf{G}')|^{-1}d(\theta^*)^{-1}k(\delta)k(\gamma)^{-1}|Ker(a)||Coker(a)|^{-1}.$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}1&\to&A_{\tilde{G}}(F)&\to&T^\theta(F)&\to&A_{\tilde{G}}(F)\backslash T^\theta(F)&\to&1\\ &&\downarrow c&&\downarrow b&&\downarrow a&&\\ 1&\to&A_{G'}(F)&\to&T'(F)&\to&A_{G'}(F)\backslash T'(F)&\to&1\end{array}$$

Ses lignes horizontales sont exactes. On en déduit aisément l'égalité

$$|Ker(a)||Coker(a)|^{-1}=|Ker(c)|^{-1}|Coker(c)||Ker(b)||Coker(b)|^{-1}.$$

Montrons que

(6) $C = |Ker(c)||Coker(c)|^{-1}$.

On peut identifier $A_{\tilde{G}}(F)$ à $A_{\tilde{G}}(F)^c \times Im(H_{A_{\tilde{G}}})$ et $A_{G'}(F)$ à $A_{G'}(F)^c \times Im(H_{A_{G'}})$ de sorte que c se décompose conformément en produit de deux homomorphismes. Le second homomorphisme est la restriction à $Im(H_{A_{\tilde{G}}})$ de l'isomorphisme de $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ sur $\mathcal{A}_{G'}$. D'après nos définitions, il préserve les mesures (il s'agit des mesures de comptage dans le cas non-archimédien). Soit V un ouvert compact de $Im(H_{A_{\tilde{G}}})$, posons $U = A_{\tilde{G}}(F)^c \times V$. Si les mesures se correspondaient localement, on aurait l'égalité $mes(c(U)) = |Ker(c)|^{-1}mes(U)$. Puisque ce n'est pas le cas, l'égalité correcte est $mes(c(U)) = C|Ker(c)|^{-1}mes(U)$. On a $mes(U) = mes(A_{\tilde{G}}(F)^c)mes(V)$ et

$$mes(c(U)) = mes(c(A_{\tilde{G}}(F)^c))mes(c(V)) = [A_{G'}(F)^c : c(A_{\tilde{G}}(F)^c)]^{-1}mes(A_{G'}(F)^c)mes(V).$$

On obtient

$$C = |Ker(c)|[A_{G'}(F)^c : c(A_{\tilde{G}}(F)^c)]^{-1}mes(A_{\tilde{G}}(F)^c)^{-1}mes(A_{G'}(F)^c).$$

Les mesures sur les groupes compacts sont définies de sorte que

$$mes(A_{\tilde{G}}(F)^c)^{-1}mes(A_{G'}(F)^c) = [Im(H_{A_{G'}}) : c(Im(H_{A_{\tilde{G}}}))]^{-1}.$$

On a aussi l'égalité

$$[Im(H_{A_{G'}}) : c(Im(H_{A_{\tilde{G}}}))][A_{G'}(F)^c : c(A_{\tilde{G}}(F)^c)] = |Coker(c)|.$$

Ces égalités conduisent à (6).

Posons $V = (1-\theta)(T)$. Considérons le diagramme commutatif

$$(7) \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & V(F) & \stackrel{d}{\to} & V(F) \\ & & & & \downarrow & & \| \\ 1 & \to & T^\theta(F) & \to & T(F) & \stackrel{e}{\to} & V(F) \\ & & \| & & \downarrow f & & \\ & & T^\theta(F) & \stackrel{b}{\to} & T'(F) & & \end{array}$$

où d et e sont toutes deux égales à $1-\theta$. Les deuxièmes lignes horizontale et verticale sont exactes. On a $Ker(b) = T^\theta(F) \cap V(F) = Ker(d)$. On a aussi

$$|Coker(b)| = |Coker(f)||T(F)/(T^\theta(F)V(F))|,$$

$$|T(F)/(T^\theta(F)V(F))| = |e(T(F))/d(V(F))| = |Coker(d)||Coker(e)|^{-1}.$$

D'où

$$|Ker(b)||Coker(b)|^{-1} = |Ker(d)||Coker(d)|^{-1}|Coker(e)||Coker(f)|^{-1}.$$

Considérons un tore D défini sur F et une isogénie $\varphi : D \to D$. Notons ici $\varphi_F : D(F) \to D(F)$ l'homomorphisme qui s'en déduit entre groupes de points sur F. Notons $\mathfrak{d}$ l'algèbre de Lie de D. On a

$$(8) \qquad |Ker(\varphi_F)||Coker(\varphi_F)|^{-1} = |X_*(D)^{\Gamma_F}/\varphi(X_*(D)^{\Gamma_F})|^{-1}|det(\varphi_{|\mathfrak{d}})|_F$$

$$= |det(\varphi_{|X_*(D)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}})|^{-1}|det(\varphi_{|\mathfrak{d}})|_F.$$

Preuve de (8). Puisque φ est injectif sur le $\mathbb{Z}$-module libre $X_*(D)^{\Gamma_F}$, on a l'égalité

$$|X_*(D)^{\Gamma_F}/\varphi(X_*(D)^{\Gamma_F})| = |det(\varphi_{|X_*(D)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}})|$$

et les deux derniers membres de (8) sont égaux.

Notons $D(F)^c$ le plus grand sous-groupe compact de $D(F)$ et $X = D(F)^c\backslash D(F)$. On utilise le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & D(F)^c & \to & D(F) & \to & X & \to & 1 \\ & & \downarrow \varphi_F^c & & \downarrow \varphi_F & & \downarrow \varphi_X & & \\ 1 & \to & D(F)^c & \to & D(F) & \to & X & \to & 1 \end{array}$$

Ses lignes étant exactes, on a

$$|Ker(\varphi_F)||Coker(\varphi_F)|^{-1} = |Ker(\varphi_F^c)||Coker(\varphi_F^c)|^{-1}|Ker(\varphi_X)||Coker(\varphi_X)|^{-1}.$$

Munissons $D(F)^c$ d'une mesure de Haar. On a

$$mes(D(F)^c) = |Coker(\varphi_F^c)|mes(Im(\varphi_F^c)),$$

$$mes(Im(\varphi_F^c)) = j(\varphi_F^c)mes(D(F)^c)|Ker(\varphi_F^c)|^{-1},$$

où $j(\varphi_F^c)$ est le jacobien de φ_F^c. Si F est non-archimédien, ce jacobien est la valeur absolue (au sens $|.|_F$) du déterminant de φ agissant sur l'algèbre de Lie de $D(F)^c$: $j(\varphi_F^c) = |det(\varphi_{|\mathfrak{d}})|_F$. Si F est archimédien, le groupe $D(F)^c$ est un groupe de Lie réel et $j(\varphi_F^c)$ est la valeur absolue réelle du déterminant de φ agissant sur son algèbre de Lie. Cette algèbre de Lie est $\mathfrak{d}(F)/(X_*(D)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{R})$, d'où

$$j(\varphi_F^c) = |det(\varphi_{|\mathfrak{d}})|_F|det(\varphi_{|X_*(D)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{R}})|^{-1} = |det(\varphi_{|\mathfrak{d}})|_F|det(\varphi_{|X_*(D)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}})|^{-1}.$$

Si F est archimédien, X est un produit de groupes $\mathbb{R}_+^\times$ et φ_X est bijectif. Si F est non-archimédien, φ_X est injectif et $|Coker(\varphi_X)| = |det(\varphi_{|X\otimes\mathbb{Q}})|$. Fixons une uniformisante ϖ_F. L'application qui à $x_* \in X_*(D)^{\Gamma_F}$ associe l'image de $x_*(\varpi_F)$ dans X identifie $X_*(D)^{\Gamma_F}$ à un sous-groupe d'indice fini de X. Donc

$$|det(\varphi_{|X\otimes\mathbb{Q}})| = |det(\varphi_{|X_*(D)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}})|.$$

En mettant ces calculs bout à bout, on obtient (8) $\square$

On utilise (8) pour calculer

$$|Ker(d)||Coker(d)|^{-1} = |det((1-\theta)_{|X_*(V)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}})|^{-1}|det((1-\theta)_{|(1-\theta)(\mathfrak{t})})|_F.$$

Le dernier terme n'est autre que $d(\theta^*)$. En rassemblant les calculs précédents, on obtient

$$(9) \qquad c_?(\tilde{G},\mathbf{G}') = |Out(\mathbf{G}')|^{-1}|det((1-\theta)_{|X_*(V)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}})|^{-1}$$

$$k(\delta)k(\gamma)^{-1}|Coker(e)||Coker(f)|^{-1}.$$

On considère la suite

$$H^1(\Gamma_F;T^\theta) \xrightarrow{g} H^1(\Gamma_F;T) \xrightarrow{i} H^1(\Gamma_F;G).$$

Supposons F non archimédien. L'application qui à $y \in \mathcal{Y}(\gamma)$ (cf. 4.4) associe le cocycle $\sigma \mapsto y\sigma(y)^{-1}$ se quotiente en une bijection de $\dot{\mathcal{Y}}(\gamma)$ sur $Ker(i \circ g)$. Donc

$$k(\gamma) = |\dot{\mathcal{Y}}(\gamma)| = |Ker(i \circ g)|.$$

De g se déduit une suite exacte

$$1 \to Ker(g) \to Ker(i \circ g) \to Im(g) \cap Ker(i) \to 1.$$

Il est bien connu que $Ker(i)$ est égal à l'image de $j : H^1(\Gamma_F; T_{sc}) \to H^1(\Gamma_F; T)$. La suite horizontale centrale de (7) se prolonge en une suite exacte de cohomologie

$$(10) \qquad T(F) \xrightarrow{e} V(F) \to H^1(\Gamma_F; T^\theta) \xrightarrow{g} H^1(\Gamma_F; T) \xrightarrow{k} H^1(\Gamma_F; V).$$

Donc $Im(g) = Ker(k)$ puis

$$k(\gamma) = |Ker(g)||Ker(k) \cap Im(j)|.$$

Si $F = \mathbb{R}$, parce que l'on travaille avec un K-espace, $\dot{\mathcal{Y}}(\gamma)$ s'identifie avec le sous-ensemble des éléments de $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T^\theta)$ dont l'image par $i \circ g$ appartient à l'image de l'application $H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{SC}) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; G)$. La suite du calcul s'adapte et on obtient la même formule que ci-dessus. Revenons à F quelconque. Considérons la suite

$$H^1(\Gamma_F; T_{sc}) \xrightarrow{j} H^1(\Gamma_F; T) \xrightarrow{k} H^1(\Gamma_F; V).$$

Il s'en déduit une suite exacte

$$1 \to Ker(j) \to Ker(k \circ j) \to Ker(k) \cap Im(j) \to 1.$$

D'où $|Ker(k) \cap Im(j)| = |Ker(k \circ j)||Ker(j)|^{-1}$ puis

$$k(\gamma) = |Ker(g)||Ker(k \circ j)||Ker(j)|^{-1}.$$

En utilisant la suite (10), on a

$$|Coker(e)| = |Ker(g)|.$$

La suite centrale verticale de (7) se prolonge elle-aussi en une suite exacte de cohomologie

$$T(F) \xrightarrow{f} T'(F) \to H^1(\Gamma_F; V) \xrightarrow{l} H^1(\Gamma_F; T).$$

D'où

$$|Coker(f)| = |Ker(l)|.$$

On obtient

$$(11) \qquad k(\gamma)^{-1}|Coker(e)||Coker(f)|^{-1} = |Ker(k \circ j)|^{-1}|Ker(j)||Ker(l)|^{-1},$$

où on rappelle

$$j : H^1(\Gamma_F; T_{sc}) \to H^1(\Gamma_F; T),\ k \circ j : H^1(\Gamma_F, T_{sc}) \to H^1(\Gamma_F; V),\ l : H^1(\Gamma_F; V) \to H^1(\Gamma_F; T).$$

Tous ces groupes sont finis. On utilise l'égalité

$$|Ker(j)||H^1(\Gamma_F; T)| = |Coker(j)||H^1(\Gamma_F; T_{sc})|$$

et les égalités analogues pour $k\circ j$ et l. On voit alors que, dans le membre de droite de (11), on peut remplacer les noyaux par les conoyaux.

Le terme $k(\delta)$ se calcule comme $k(\gamma)$, le calcul étant beaucoup plus simple puisque la torsion est intérieure. On a $k(\delta)=|Im(m)|$, où

$$m:H^1(\Gamma_F;T'_{sc})\to H^1(\Gamma_F;T').$$

On obtient

$$k(\delta)k(\gamma)^{-1}|Coker(e)||Coker(f)|^{-1}=|Im(m)||Coker(k\circ j)|^{-1}|Coker(j)||Coker(l)|^{-1}.$$

On utilise maintenant la dualité. Par exemple $\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})$ est le dual de $H^1(\Gamma_F;T)$. On voit que $|Coker(j)|=|Ker(\hat{j})|$, où $\hat{j}:\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})\to\pi_0(\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F})$ est dual de j. On calcule de même $|Coker(k\circ j)|$ et $|Coker(l)|$. On a aussi $|Im(m)|=|Im(\hat{m})|$ et la formule ci-dessus se transcrit en

$$(12)\qquad k(\delta)k(\gamma)^{-1}|Coker(e)||Coker(f)|^{-1}=|Im(\hat{m})||Ker(\hat{j}\circ\hat{k})|^{-1}|Ker(\hat{j})||Ker(\hat{l})|^{-1}.$$

Rappelons que $\hat{T}'=\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. On a une suite exacte

$$\pi_0(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})\to\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0,\Gamma_F})\stackrel{\hat{m}}{\to}\pi_0((\hat{T}^{\hat{\theta},0}/Z(\hat{G}'))^{\Gamma_F}).$$

La donnée $\mathbf{G}'$ est elliptique et T' est un tore elliptique. Donc $Z(\hat{G}')^{\Gamma_F,0}=\hat{T}^{\hat{\theta},\Gamma_F,0}=Z(\hat{G})^{\hat{\theta},\Gamma_F,0}$. La première flèche ci-dessus est injective, d'où

$$(13)\qquad |Im(\hat{m})|=|\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0,\Gamma_F})||\pi_0(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})|^{-1}.$$

Rappelons que $\hat{V}=\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. On a une suite exacte

$$\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0,\Gamma_F})\stackrel{\hat{n}}{\to}\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})\stackrel{\hat{l}}{\to}\pi_0(\hat{V}^{\Gamma_F}).$$

Ici, la première flèche n'est pas injective. Son noyau est $(\hat{T}^{\hat{\theta},0}\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})/\hat{T}^{\hat{\theta},\hat{\Gamma}_F,0}=\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0}\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})$. D'où

$$(14)\qquad |Ker(\hat{l})|=|Coker(\hat{n})|=|\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0,\Gamma_F})||\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0}\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})|^{-1}.$$

De même, on a une suite exacte

$$\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})\to\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})\stackrel{\hat{j}}{\to}\pi_0(\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F}).$$

Le noyau de la première flèche est $\pi_0(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})$ et on obtient

$$(15)\qquad |Ker(\hat{j})|=|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||\pi_0(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})|^{-1}.$$

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}&&\rightarrow&&\hat{T}_{ad}\\&\searrow&&\nearrow 1-\hat{\theta}&\\&&\hat{T}_{ad}/\hat{T}_{ad}^{\hat{\theta}}&&\end{array}$$

d'où la factorisation

$$\begin{tikzcd}
\pi_0((\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F}) \arrow[rr, "\hat{j}\circ\hat{k}"] \arrow[dr] & & \pi_0(\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F}) \\
& \pi_0((\hat{T}_{ad}/\hat{T}_{ad}^{\hat{\theta}})^{\Gamma_F}) \arrow[ur, "1-\hat{\theta}"'] &
\end{tikzcd}$$

Puisque $\tilde{T}$ est elliptique, on a $X_*(\hat{T}_{ad})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} = 0$. Donc $X_*(\hat{T}_{ad})^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q} = (1-\hat{\theta})(X_*(\hat{T}_{ad})^{\Gamma_F})\otimes\mathbb{Q}$ puis $\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0} = (1-\hat{\theta})(\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0})$. Il en résulte que l'homomorphisme

$$1-\hat{\theta} : \pi_0((\hat{T}_{ad}/\hat{T}_{ad}^{\hat{\theta}})^{\Gamma_F}) \to \pi_0(\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F})$$

est injectif. Le noyau de $\hat{j}\circ\hat{k}$ est donc égal à celui de l'homomorphisme

$$\pi_0((\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F}) \to \pi_0((\hat{T}_{ad}/\hat{T}_{ad}^{\hat{\theta}})^{\Gamma_F}).$$

Ce dernier se complète en la suite exacte

$$\pi_0((Z(\hat{G})/(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F}) \xrightarrow{\hat{p}} \pi_0((\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F}) \to \pi_0((\hat{T}_{ad}/\hat{T}_{ad}^{\hat{\theta}})^{\Gamma_F}).$$

D'où :

$$(16)\qquad |Ker(\hat{j}\circ\hat{k})| = |\pi_0((Z(\hat{G})/(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}))^{\Gamma_F})||Ker(\hat{p})|^{-1}.$$

On calcule

$$Ker(\hat{p}) = (Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0}\hat{T}^{\hat{\theta},0})/(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})).$$

La suite suivante est exacte :

$$1 \to (\hat{T}^{\hat{\theta},0}\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})/(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}) \to ((Z(\hat{G})\hat{T}^{\hat{\theta},0})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0} \to Ker(\hat{p}) \to 1$$

Le premier terme de cette suite a pour nombre d'éléments

$$|\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0}\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})||\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})|^{-1}.$$

Le deuxième terme s'insère dans la suite exacte

$$1 \to (Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0} \to ((Z(\hat{G})\hat{T}^{\hat{\theta},0})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}$$

$$\to ((Z(\hat{G})\hat{T}^{\hat{\theta},0})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})/(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0}) \to 1.$$

Le premier terme de cette suite n'est autre que $\pi_0(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})$. On voit que le second n'est autre que $\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0,\hat{\theta}}$. Ce dernier groupe est fini puisque $\tilde{T}$ est elliptique. A ce point, on obtient

$$(17)\qquad |Ker(\hat{p})| = |\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0}\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})||\pi_0(Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\Gamma_F,0})||\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0,\hat{\theta}}|.$$

Puisque l'endomorphisme $1-\hat{\theta}$ de $\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0}$ est une isogénie, son noyau $\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0,\hat{\theta}}$ a pour nombre d'éléments la valeur absolue du déterminant de $1-\hat{\theta}$ agissant sur $X_*(\hat{T}_{ad})^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}$. Par dualité, c'est aussi la valeur absolue du déterminant de $1-\theta$ agissant sur $X_*(T_{sc})^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}$. On utilise les égalités

$$X_*(V)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q} = (1-\theta)(X_*(T)^{\Gamma_F})\otimes\mathbb{Q}$$

$$= \big((1-\theta)(X_*(T_{sc})^{\Gamma_F}) \otimes \mathbb{Q}\big) \oplus \big((1-\theta)(X_*(Z(G)^0)^{\Gamma_F}) \otimes \mathbb{Q}\big)\,.$$

On a $(1-\theta)(X_*(T_{sc})^{\Gamma_F}) \otimes \mathbb{Q} = X_*(T_{sc})^{\Gamma_F} \otimes \mathbb{Q}$ toujours parce que $\tilde{T}$ est elliptique. D'où

$$|\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0,\hat{\theta}}| = |det((1-\theta)_{|X_*(V)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}})||det((1-\theta)_{|(1-\theta)(X_*(Z(G)^0)^{\Gamma_F})\otimes\mathbb{Q}})|^{-1}.$$

Pour calculer ce dernier déterminant, on peut remplacer $(1-\theta)(X_*(Z(G)^0)^{\Gamma_F}) \otimes \mathbb{Q}$ par $(1-\theta)(X_*(Z(G)^0)^{\Gamma_F}) \otimes \mathbb{R}$. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On obtient alors

$$(18) \qquad |\hat{T}_{ad}^{\Gamma_F,0,\hat{\theta}}| = |det((1-\theta)_{|X_*(V)^{\Gamma_F}\otimes\mathbb{Q}})||det((1-\theta)_{|\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}})|^{-1}.$$

Rassemblons les formules (9) et (12), (13),...,(18). On obtient

$$c_?(\tilde{G},\mathbf{G}') = |det((1-\theta)_{|\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||Z(\hat{G}')^{\Gamma_F})|^{-1}|$$

$$|Out(\mathbf{G}')|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0} \cap T^{\hat{\theta},0})||\pi_0((Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap T^{\hat{\theta},0}))^{\Gamma_F})|^{-1}.$$

On a l'égalité $Z(\hat{G}) \cap T^{\hat{\theta},0} = Z(\hat{G}) \cap \hat{G}'$. La formule ci-dessus est alors celle qui définit $c(\tilde{G},\mathbf{G}')$. Cela démontre l'égalité (5), ce qui achève la preuve. $\square$

5 Distributions "géométriques"

5.1 Distributions "géométriques" dans le cas non-archimédien

On suppose F non archimédien. On note $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ l'espace des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui se factorisent en une forme linéaire sur $I(\tilde{G}(F),\omega)$ et qui sont supportées par une réunion finie de classes de conjugaison par $G(F)$. On a déjà construit de telles formes linéaires en 2.4 : l'intégrale orbitale $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ associée à un élément $\gamma \in \tilde{G}(F)$ et aux choix de mesures sur $G(F)$ et $G_\gamma(F)$. On se débarrasse du choix de la mesure sur $G(F)$ en considérant cette forme linéaire comme définie sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. On obtient donc un élément de $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*$. Il est commode de noter tout élément de cet espace comme une intégrale orbitale. C'est-à-dire que, pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$, on notera $I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ la valeur de $\boldsymbol{\gamma}$ sur $\mathbf{f}$. On utilisera différentes variantes de cette notation (pour les intégrales orbitales stables par exemple).

Si $\mathcal{O}$ est une réunion finie de classes de conjugaison (par $G(F)$) semi-simples, on note $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ le sous-espace de ces distributions à support dans $\{\gamma \in \tilde{G}; \gamma_{ss} \in \mathcal{O}\}$, où γ_{ss} est la partie semi-simple de γ. Notons qu'un tel sous-espace peut être nul, à cause du caractère ω. Plus concrètement, notons $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$ le sous-espace des $f \in I(\tilde{G}(F),\omega)$ pour lesquels il existe un voisinage $\tilde{V}$ de $\mathcal{O}$ invariant par conjugaison par $G(F)$ tel que $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{V} \cap \tilde{G}_{reg}(F)$. Posons $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc} = I(\tilde{G}(F),\omega)/I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$. La projection naturelle

$$C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \to I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$$

est surjective et on a

(1) $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ est l'espace des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui se factorisent par cette projection.

Preuve. Notons $C_c^\infty(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$ le sous-espace des éléments $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ dont le support ne contient pas d'élément de partie semi-simple dans $\mathcal{O}$. Par définition, $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ est l'espace des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui annulent $C_c^\infty(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$ et qui se factorisent par $I(\tilde{G}(F),\omega)$. Il suffit donc de prouver que l'image de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$ dans $I(\tilde{G}(F),\omega)$ est égale à $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$. Il est clair que cette image est contenue dans $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$. Inversement, soit $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ dont l'image dans $I(\tilde{G}(F),\omega)$ appartienne à ce sous-espace. On choisit un voisinage $\tilde{V}$ de $\mathcal{O}$ invariant par conjugaison tel que $I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=0$ pour tout $\gamma\in\tilde{V}\cap\tilde{G}_{reg}(F)$. On peut supposer $\tilde{V}$ ouvert et fermé. Notons $\mathbf{1}_{\tilde{V}}$ sa fonction caractéristique. On a $f=f\mathbf{1}_{\tilde{V}}+f(1-\mathbf{1}_{\tilde{V}})$. Toutes les intégrales orbitales fortement régulières de la fonction $f\mathbf{1}_{\tilde{V}}$ sont nulles. Cela entraîne que l'image de cette fonction dans $I(\tilde{G}(F),\omega)$ est nulle. La deuxième fonction $f(1-\mathbf{1}_{\tilde{V}})$ appartient à $C_c^\infty(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$. $\square$

D'après (1), $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ s'identifie au dual de $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$.Il est bien connu que tout élément de $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ est combinaison linéaire d'intégrales orbitales. Cela entraîne que $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ est la somme directe de ses sous-espaces $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ quand $\mathcal{O}$ décrit les classes de conjugaison semi-simples.

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Dualement à l'application

$$\begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F)) & \to & I(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F)) \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}_{\tilde{M},\omega}, \end{array}$$

on a un homomorphisme d'induction

$$\begin{array}{ccc} D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^* & \to & D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^* \\ \boldsymbol{\gamma} & \mapsto & \boldsymbol{\gamma}^{\tilde{G}} \end{array}$$

Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison semi-simple contenant un élément γ tel que $\gamma\in\tilde{M}(F)$ et $G_\gamma\subset M$. Alors $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ est contenu dans l'image de cet homomorphisme d'induction.

5.2 Distributions "géométriques" dans le cas archimédien

On suppose $F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ d'une topologie de la façon suivante. Notons $\mathfrak{U}(G)$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G. Cette algèbre agit sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ de deux façons : via les translations à gauche ou à droite. Considérons par exemple l'action via les translations à gauche. Pour $Y\in\mathfrak{U}(G)$, on définit la semi-norme ν_Y sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ par $\nu_Y(f)=sup\{|(Yf)(\gamma)|;\gamma\in\tilde{G}(F)\}$. Soit $\tilde{H}$ un sous-ensemble compact de $\tilde{G}(F)$. Notons $C_c^\infty(\tilde{H})$ le sous-espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ à support dans $\tilde{H}$. On munit ce sous-espace de la topologie définie par les semi-normes ν_Y pour $Y\in\mathfrak{U}(G)$. L'espace $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ est limite inductive des $C_c^\infty(\tilde{H})$ quand $\tilde{H}$ décrit les sous-ensembles compacts de $\tilde{G}(F)$ et on le munit de la topologie limite inductive des topologies sur ces sous-espaces. On appelle distribution sur $\tilde{G}(F)$ une forme linéaire continue sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Une distribution ω-équivariante est une distribution qui se factorise par $I(\tilde{G}(F),\omega)$. En imitant Bouaziz, on munit l'espace $I(\tilde{G}(F),\omega)$ d'une topologie de la façon suivante. Fixons un ensemble $\tilde{\mathcal{T}}$ de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ de tores tordus maximaux $\tilde{T}$ tels que ω soit trivial sur $T^\theta(F)$. Un tel ensemble est fini. En fixant des mesures sur $G(F)$ et sur $T(F)$ pour tout $\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}$, on peut considérer $I(\tilde{G}(F),\omega)$ comme un espace de familles $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}}=(\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}}$ où $\varphi_{\tilde{T}}$ est une fonction C^∞ sur $\tilde{T}(F)\cap\tilde{G}_{reg}(F)$ (l'intégrale orbitale sur $\tilde{T}(F)$). Dans la suite, on considérera $I(\tilde{G}(F),\omega)$

soit comme un quotient de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ (ses éléments seront alors notés f), soit comme un espace de telles familles (ses éléments seront alors notés $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}}$). On pose $\mathfrak{U}_{\tilde{\mathcal{T}}} = \prod_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}} \mathfrak{U}(T)$. Pour une famille $Y_{\tilde{\mathcal{T}}} = (Y_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}} \in \mathfrak{U}_{\tilde{\mathcal{T}}}$, on définit la semi-norme

$$\nu_{Y_{\tilde{\mathcal{T}}}}(\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}}) = sup\{|(Y_{\tilde{T}}\varphi_{\tilde{T}})(\gamma)|; \gamma \in \tilde{T}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F), \tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}\}.$$

Elle est bien définie c'est-à-dire que ce *sup* est fini pour les éléments de $I(\tilde{G}(F))$. C'est un résultat profond d'Harish-Chandra (sa généralisation au cas tordu par descente est immédiate). Soit $\tilde{H}_{\tilde{\mathcal{T}}} = (\tilde{H}_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}}$ une famille telle que pour tout $\tilde{T}$, $\tilde{H}_{\tilde{T}}$ est un sous-ensemble compact de $\tilde{T}(F)$. On note $I(\tilde{H}_{\tilde{\mathcal{T}}}, \omega)$ le sous-espace des éléments $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}} = (\varphi_{\tilde{T}})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}} \in I(\tilde{G}(F), \omega)$ tels que pour tout $\tilde{T}$, $\varphi_{\tilde{T}}$ est à support dans $\tilde{H}_{\tilde{T}}$. On munit ce sous-espace de la topologie définie par les semi-normes $\nu_{Y_{\tilde{\mathcal{T}}}}$ pour $Y_{\tilde{\mathcal{T}}} \in \mathfrak{U}_{\tilde{\mathcal{T}}}$. Cela le munit d'une topologie d'espace de Fréchet, c'est-à-dire que $I(\tilde{H}_{\tilde{\mathcal{T}}}, \omega)$ est complet : les conditions de saut qui définissent l'espace des intégrales orbitales sont des conditions fermées. On munit $I(\tilde{G}(F), \omega)$ de la topologie limite inductive de celle sur les sous-espaces $I(\tilde{H}_{\tilde{\mathcal{T}}}, \omega)$. On a

(1) l'homomorphisme $C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \to I(\tilde{G}(F), \omega)$ est une surjection continue et ouverte.

Cf. [R1] théorème 9.4. Renard suppose $\omega = 1$ mais, ici encore, la preuve se généralise au cas ω quelconque.

D'après (1), l'espace des distributions ω-équivariantes s'identifie à celui des formes linéaires continues sur $I(\tilde{G}(F), \omega)$. On note $D_{géom}(\tilde{G}(F), \omega)$ l'espace des distributions ω-équivariantes qui sont supportées par un nombre fini de classes de conjugaison par $G(F)$. Concrètement, considérons un tore tordu $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$ et un élément $\eta \in \tilde{T}(F)$. Fixons une composante connexe Ω de $\mathfrak{t}^\theta(F) \cap \mathfrak{g}_{\eta,reg}(F)$ et un opérateur différentiel D sur $\mathfrak{t}^\theta(F)$ à coefficients constants. Pour $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}} = (\varphi_{\tilde{T}'})_{\tilde{T}'\in\tilde{\mathcal{T}}} \in I(\tilde{G}(F), \omega)$, la fonction $X \mapsto D\varphi_{\tilde{T}}(exp(X)\eta)$ est C^∞ sur Ω et a une limite quand X tend vers 0 dans Ω. Notons $\boldsymbol{\gamma}_{\eta,\tilde{T},\Omega,D}(\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}})$ cette limite. La forme linéaire $\boldsymbol{\gamma}_{\eta,\tilde{T},\Omega,D}$ ainsi construite appartient à $D_{géom}(\tilde{G}(F), \omega)$ et cet espace est engendré linéairement par de telles formes linéaires.

Si $\mathcal{O}$ est une réunion finie de classes de conjugaison (par $G(F)$) semi-simples, on définit le sous-espace $D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$ comme dans le cas non-archimédien. Notons $I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},0}$ le sous-espace des $f \in I(\tilde{G}(F), \omega)$ pour lesquels il existe un voisinage $\tilde{V}$ de $\mathcal{O}$ invariant par conjugaison par $G(F)$ tel que $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{V} \cap \tilde{G}_{reg}(F)$. Notons $C\ell I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},0}$ sa clôture dans $I(\tilde{G}(F))$. C'est le sous-espace des $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}} \in I(\tilde{G}(F), \omega)$ vérifiant la condition suivante. Soient $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$, $\eta \in \tilde{T}(F) \cap \mathcal{O}$ et $Y \in \mathfrak{U}(T)$. Alors la fonction $Y\varphi_{\tilde{T}}$ bien définie sur $\tilde{T}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ a une limite nulle en η. On pose $I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc} = I(\tilde{G}(F), \omega)/C\ell I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},0}$ et on munit cet espace de la topologie quotient. Il y a un homomorphisme surjectif, continu et ouvert

$$C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \to I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc}.$$

On a

(2) $D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$ est l'image par l'homomorphisme dual de l'espace des formes linéaires continues sur $I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc}$.

Preuve. On note $C_c^\infty(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ dont le support ne contient pas d'élément de partie semi-simple dans $\mathcal{O}$. Son image dans $I(\tilde{G}(F), \omega)$ est évidemment contenue dans $I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},0}$. En fait, cette image est égale à $I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},0}$. La preuve est essentiellement la même que celle de 5.1(1). Il suffit d'y remplacer la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{V}}$ par une fonction C^∞, invariante par conjugaison, à support dans $\tilde{V}$ et valant 1 au voisinage des éléments de partie semi-simple dans $\mathcal{O}$. D'après (1) et la définition, $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ est l'espace des formes linéaires continues sur $I(\tilde{G}(F),\omega)$ qui annulent l'image de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$. Autrement dit qui annulent $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$. Puisqu'il s'agit de formes continues, cela équivaut à annuler $C\ell I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$ ou encore à se factoriser en une forme linéaire continue sur $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$. $\square$

Remarquons que si $\tilde{M}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$, l'homomorphisme $f\mapsto f_{\tilde{M},\omega}$ de $I(\tilde{G}(F),\omega)$ dans $I(\tilde{M}(F),\omega)$ se descend en un homomorphisme de $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ dans $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},loc}$ où $\mathcal{O}_{\tilde{M}}=\tilde{M}(F)\cap\mathcal{O}$. Il y a deux façons naturelles de définir un sous-espace $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}\subset I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$: soit comme image par localisation de $I_{cusp}(\tilde{G}(F),\omega)$, soit comme le sous-espace de $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ annulé par les homomorphismes $f\mapsto f_{\tilde{M},\omega}$ pour tout $\tilde{M}$ propre. On a

(3) ces deux définitions coïncident.

Preuve. Supposons $F=\mathbb{R}$. La première définition donne évidemment un sous-espace de l'espace défini par la seconde. Soit $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ un élément dont l'image par localisation appartient à ce dernier espace. Fixons un élément elliptique $\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}$ et un élément $\eta\in\tilde{T}(\mathbb{R})\cap\mathcal{O}$. Comme en 4.13(3), considérons la fonction

$$(4)\qquad X\mapsto\Delta_\eta(X)\varphi_{\tilde{T}}(exp(X)\eta)$$

au voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})\cap\mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$. Soit Ω une composante connexe de cet ensemble, contenant η dans son adhérence. La fonction ci-dessus est C^∞ sur Ω et on sait qu'elle se prolonge en une fonction C^∞ dans un voisinage de Ω (cf. [Boua] remarque 3.2). Notons $\phi_{\tilde{T},\Omega}$ un tel prolongement. L'hypothèse de cuspidalité sur $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}}$ implique que le développement infinitésimal au voisinage de η de $\phi_{\tilde{T},\Omega}$ ne dépend pas de Ω. C'est-à-dire que, pour tout $Y\in\mathfrak{U}(T^{\theta,0})$, $(Y\phi_{\tilde{T},\Omega})(\eta)$ est indépendant de Ω. Considérons le normalisateur de $T^{\theta,0}$ dans $Z_G(\eta,\mathbb{R})$ et son quotient fini $W_\eta(T^{\theta,0})$ par $T^{\theta,0}(\mathbb{R})$. Ce quotient agit sur les fonctions sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$. La fonction Δ_η se transforme selon un certain caractère χ de ce groupe. Parce que les intégrales orbitales sont invariantes par ce groupe, la fonction (4) se transforme selon le même caractère χ. Donc le développement infinitésimal commun des fonctions $\phi_{\tilde{T},\Omega}$ se transforme lui-aussi selon le caractère χ. Fixons Ω et introduisons la fonction

$$\phi'_{\tilde{T}}=|W_\eta(T^{\theta,0})|^{-1}\sum_{w\in W_\eta(T^{\theta,0})}\chi(w)^{-1}w\phi_{\tilde{T},\Omega}.$$

Elle a même développement infinitésimal que nos fonctions $\phi_{\tilde{T},\Omega}$. Il existe une fonction $\varphi'_{\tilde{T}}$ sur $\tilde{T}(\mathbb{R})\cap\tilde{G}_{reg}(F)$ vérifiant la condition 4.13(2) et telle que la fonction

$$X\mapsto\Delta_\eta(X)\varphi'_{\tilde{T}}(exp(X)\eta)$$

coïncide avec $\phi'_{\tilde{T}}$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})\cap\mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$. Quitte à multiplier cette fonction par une fonction C^∞ invariante par conjugaison et à support concentré dans un voisinage invariant de η, on peut supposer que $\varphi'_{\tilde{T}}$ vérifie la condition 4.13(3). Donc cette fonction, prolongée par 0 sur les autres éléments de $\tilde{\mathcal{T}}$, appartient à $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Par construction, $\varphi'_{\tilde{T}}$ a même développement infinitésimal que $\varphi_{\tilde{T}}$ en η. On fait maintenant varier η parmi un ensemble (fini) de représentants des classes de conjugaison dans $\mathcal{O}\cap\tilde{T}(\mathbb{R})$ et on fait varier $\tilde{T}$ parmi l'ensemble des éléments elliptiques de $\tilde{\mathcal{T}}$. Un argument de partition de l'unité nous fournit un élément $\varphi'_{\tilde{\mathcal{T}}}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ qui a même image que $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}}$ dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)_{\mathcal{O},loc}$. Cela achève la preuve pour $F=\mathbb{R}$. Si $F=\mathbb{C}$, il n'y a qu'un seul élément dans $\tilde{\mathcal{T}}$, qui est un espace de Levi minimal. L'espace $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{C}),\omega)$ est nul sauf si G est un tore, auquel cas $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{C}),\omega) = I(\tilde{G}(\mathbb{C}),\omega)$. Il en est de même infinitésimalement, quelle que soit la définition. $\square$

Rappelons que, pour nous, un élément est elliptique s'il appartient à un sous-tore tordu maximal elliptique. On a

(5) supposons $\mathcal{O}$ formé d'éléments non-elliptiques ; alors $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ est formé de combinaisons linéaires de distributions induites à partir d'espaces de Levi propres.

Preuve. L'espace $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ est engendré par des distributions $\boldsymbol{\gamma}_{\eta,\tilde{T},\Omega,D}$ comme plus haut, où $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$ et $\eta \in \mathcal{O} \cap \tilde{T}(F)$. Notre définition d'ellipticité implique que $\tilde{T}$ n'est pas elliptique. Il est donc contenu dans un espace de Levi propre $\tilde{M}$. Les mêmes données η, $\tilde{T}$, Ω, D définissent une distribution $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M},\eta,\tilde{T},\Omega,D} \in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)$ dont $\boldsymbol{\gamma}_{\eta,\tilde{T},\Omega,D}$ est l'induite. $\square$

Décrivons plus concrètement l'espace $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ dans le cas où $F = \mathbb{R}$ et $\mathcal{O}$ est une unique classe de conjugaison. Fixons $\eta \in \mathcal{O}$. Fixons un ensemble fini $\tilde{\mathcal{T}}$ de sous-tores tordus maximaux de $\tilde{G}$ tels que :

• $\eta \in \tilde{T}(\mathbb{R})$ pour tout $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$;

• pour tout sous-tore maximal S de G_η, il existe $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$ et il existe $g \in Z_G(\eta;\mathbb{R})$ tels que $S = ad_g(T^{\theta,0})$.

Pour tout $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$, notons $\underline{\Omega}_{\tilde{T}}$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}_{\eta,reg}(\mathbb{R})$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, pour $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$ et $\Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}}$, considérons la fonction $\phi_{f,\tilde{T},\Omega}$ sur Ω définie par

$$\phi_{f,\tilde{T},\Omega}(X) = I^{\tilde{G}}(exp(X)\eta,\omega,f).$$

Elle est nulle si ω n'est pas trivial sur $T^\theta(\mathbb{R})$. Comme on l'a dit, Harish-Chandra a prouvé que cette fonction se prolongeait en une fonction C^∞ dans un voisinage de Ω. Fixons des coordonnées sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ et notons $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})]]$ l'espace des séries formelles sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$. On note $\varphi_{f,\tilde{T},\Omega} \in \mathbb{C}[[\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})]]$ le développement en série de la fonction $\phi_{f,\tilde{T},\Omega}$ en $X = 0$. On pose $\varphi_f = (\varphi_{f,\tilde{T},\Omega})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}},\Omega\in\underline{\Omega}_{\tilde{T}}}$. L'espace $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ est celui de ces familles φ_f quand f décrit $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. C'est un sous-espace de

$$(6) \qquad \oplus_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}},\Omega\in\underline{\Omega}_{\tilde{T}}} \mathbb{C}[[\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})]].$$

On sait le décrire. C'est le sous-espace des familles de séries formelles $(\varphi_{\tilde{T},\Omega})_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}},\Omega\in\underline{\Omega}_{\tilde{T}}}$ qui vérifient deux conditions :

(7) soient $\tilde{T},\tilde{T}' \in \tilde{\mathcal{T}}$ et $g \in G(\mathbb{R})$ tel que $g\eta g^{-1} = \eta$ et $g\tilde{T}g^{-1} = \tilde{T}'$; alors ad_g envoie $\underline{\Omega}_{\tilde{T}}$ sur $\underline{\Omega}_{\tilde{T}'}$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})]$ sur $\mathbb{C}[\mathfrak{t}'^\theta(\mathbb{R})]$; pour $\Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}}$, on doit avoir $\varphi_{\tilde{T}',ad_g(\Omega)} = \omega(g)ad_g(\varphi_{\tilde{T},\Omega})$;

(8) soient $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$ et Ω, Ω' deux éléments adjacents de $\underline{\Omega}_{\tilde{T}}$; alors une condition de saut relie $\varphi_{\tilde{T},\Omega}$, $\varphi_{\tilde{T},\Omega'}$ et $\varphi_{\tilde{T}_1,\Omega_1}$, où $\tilde{T}_1$ et Ω_1 sont déterminés par $\tilde{T}$, Ω, Ω', $\tilde{T}_1$ étant plus déployé que $\tilde{T}$ (c'est-à-dire que l'on a $dim(A_{\tilde{T}}) < dim(A_{\tilde{T}_1})$).

On renvoie à [R2] 3.2 pour cette condition de saut. La topologie sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ s'identifie à celle déduite de la topologie habituelle sur les espaces de séries formelles (un voisinage de 0 contient les séries qui s'annulent en 0 à un ordre assez grand). Pour $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$, notons $D[\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})]$ l'espace des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$. Cet espace se plonge naturellement dans le dual de $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})]]$: on applique un opérateur différentiel à une série formelle et on évalue le résultat en 0. Ainsi

$$\oplus_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}},\Omega\in\underline{\Omega}_{\tilde{T}}} D[\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})]$$

se plonge dans le dual de l'espace (6). Par restriction, on obtient une application linéaire

$$\oplus_{\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}},\Omega\in\underline{\Omega}_{\tilde{T}}} D[\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})] \to (I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)_{\mathcal{O},loc})^*.$$

L'espace $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ est l'image de cette application.

Remarque. Arthur donne une description beaucoup plus précise en [A3] lemme 1.1.

5.3 Filtration de $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$

Fixons des mesures de Haar sur $G(F)$ et sur $M(F)$ pour tout Levi M de G. Pour tout entier $n\geq -1$ notons $\mathcal{F}^nD_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ le sous-espace de $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ engendré par les distributions induites $(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}})^{\tilde{G}}$, où $\tilde{M}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$ tel que $a_{\tilde{M}}=n+1$ et $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}\in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)$. Ces espaces forment une filtration

$$\{0\}=\mathcal{F}^{a_{\tilde{M}_0}}D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\subset \mathcal{F}^{a_{\tilde{M}_0}-1}D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\subset ...$$

$$...\subset \mathcal{F}^{a_{\tilde{G}}-1}D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)=D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega).$$

Pour une réunion finie $\mathcal{O}$ de classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}(F)$, notons $\mathcal{F}^nD_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ le sous-espace de $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ engendré par distributions induites $(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}})^{\tilde{G}}$, où $\tilde{M}$ est un espace de Levi de $\tilde{G}$ tel que $a_{\tilde{M}}=n+1$ et $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}\in D_{géom}(\mathcal{O}\cap\tilde{M}(F),\omega)$.

Rappelons que l'on a défini en 4.2 une filtration $(\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega))_{n\geq -1}$ de $I(\tilde{G}(F),\omega)$.

Proposition. *(i) Pour tout entier $n\geq -1$, $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$ est l'annulateur de $\mathcal{F}^nD_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ dans $I(\tilde{G}(F),\omega)$ et $\mathcal{F}^nD_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ est l'annulateur de $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$ dans $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$.*

(ii) Pour toute réunion finie $\mathcal{O}$ de classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}(F)$ et tout entier $n\geq -1$, on a l'égalité

$$\mathcal{F}^nD_{géom}(\mathcal{O},\omega)=\mathcal{F}^nD_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\cap D_{géom}(\mathcal{O},\omega).$$

Preuve. On aura besoin d'une propriété préliminaire. Pour tout $n\geq 0$, fixons un ensemble $\underline{\mathcal{L}}^n$ de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ d'espaces de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ tels que $a_{\tilde{M}}=n$. On considère l'application

$$(1)\qquad \begin{array}{cccc} p^n: & I(\tilde{G}(F),\omega) & \to & I^n=\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n}I(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}\\ & f & \mapsto & \oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n}f_{\tilde{M},\omega}.\end{array}$$

Posons

$$I^n_{cusp}=\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n}I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}.$$

Par définition, $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$ est l'image réciproque par p^n du sous-espace I^n_{cusp} de I^n. On a vu en 4.2 que de l'application p^n se déduisait un isomorphisme

$$(2)\qquad \mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)/\mathcal{F}^{n-1}I(\tilde{G}(F),\omega)\simeq I^n_{cusp}.$$

Soit $\mathcal{O}$ une réunion finie de classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}(F)$. On a défini l'espace $I(\tilde{G},\omega)_{\mathcal{O},loc}$ en 5.1 et 5.2. Pour tout espace de Levi $\tilde{M}$, posons $\mathcal{O}_{\tilde{M}}=\mathcal{O}\cap\tilde{M}(F)$. Montrons que

(3) soit $f\in I(\tilde{G}(F),\omega)$; supposons que, pour tout $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n$, l'image de $f_{\tilde{M},\omega}$ dans $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},loc}$ soit nulle ; alors il existe $f'\in I(\tilde{G}(F),\omega)$ telle que $p^n(f')=p^n(f)$ et dont l'image dans $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ soit nulle.

Supposons d'abord F non-archimédien. L'hypothèse signifie que $f_{\tilde{M},\omega}\in I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}$ pour tout $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n$, autrement dit il existe un voisinage $\tilde{V}_{\tilde{M}}$ de $\mathcal{O}_{\tilde{M}}$ dans $\tilde{M}(F)$, invariant par conjugaison, tel que $f_{\tilde{M},\omega}$ soit nul sur $\tilde{V}_{\tilde{M}}$. Fixons de tels voisinages. On peut fixer un voisinage $\tilde{V}$ de $\mathcal{O}$ dans $\tilde{G}(F)$, invariant par conjugaison, tel que $\tilde{V}\cap\tilde{M}(F)\subset\tilde{V}_{\tilde{M}}$ pour tout $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n$. On peut supposer $\tilde{V}$ ouvert et fermé. Alors la fonction $f'=f(1-\mathbf{1}_{\tilde{V}})$ répond à la question.

Supposons maintenant F archimédien. Si $n=a_{\tilde{G}}$, l'application p^n est l'identité de $I(\tilde{G}(F),\omega)$ et l'assertion est claire ($f'=f$ répond à la question). Supposons $n>a_{\tilde{G}}$ et raisonnons par récurrence sur n. Soit $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n-1}$, considérons l'élément $f_{\tilde{M},\omega}\in I(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$. L'hypothèse implique que son image dans $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},loc}$ est cuspidale au sens de la deuxième définition de 5.2 (3). Précisément, cette relation nous dit qu'il existe $\varphi^{\tilde{M}}\in I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)$ qui a même image que $f_{\tilde{M},\omega}$ dans $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},loc}$. En moyennant $\varphi^{\tilde{M}}$ sur $W(\tilde{M})$, on peut supposer $\varphi^{\tilde{M}}\in I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$. Posons $\varphi=(\varphi^{\tilde{M}})_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n-1}}$. En appliquant (2) pour $n-1$, on relève φ en un élément $f_0\in\mathcal{F}^{n-1}I(\tilde{G}(F),\omega)$. Pour tout $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n-1}$, la fonction $(f-f_0)_{\tilde{M},\omega}$ est par construction d'image nulle dans $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},loc}$. L'hypothèse de récurrence assure l'existence de $f'\in I(\tilde{G}(F),\omega)$ d'image nulle dans $I(\tilde{G}(F),\omega)$ et telle que $p^{n-1}(f')=p^{n-1}(f-f_0)$. L'application p^n se factorise par p^{n-1}. On a donc aussi $p^n(f')=p^n(f-f_0)$. Mais $p^n(f_0)=0$ puisque $f_0\in\mathcal{F}^{n-1}I(\tilde{G}(F),\omega)$. Donc f' répond à la question. Cela prouve (3).

Puisque $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$ est l'image réciproque par p^n de I^n_{cusp}, (3) entraîne

(4) soit $f\in\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$; supposons que, pour tout $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^n$, l'image de $f_{\tilde{M},\omega}$ dans $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},loc}$ soit nulle ; alors il existe $f'\in\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$ telle que $p^n(f')=p^n(f)$ et dont l'image dans $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ soit nulle.

Venons-en à la preuve de la proposition. Il est clair que l'annulateur de $D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)$ dans $I(\tilde{G}(F),\omega)$ est nul et que l'annulateur de $I(\tilde{G}(F),\omega)$ dans $D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)$ est nul. Soient $f\in I(\tilde{G}(F),\omega)$ et $n\geq -1$. Alors f appartient à l'annulateur de $\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)$ si et seulement si, pour tout $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}$ et tout $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)$, on a $I^{\tilde{G}}((\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}})^{\tilde{G}},\omega,f)=0$. Cette égalité équivaut à $I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}},\omega,f_{\tilde{M},\omega})=0$. Comme on vient de le dire, elle est vérifiée pour tout $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}$ si et seulement si $f_{\tilde{M},\omega}=0$. Donc f appartient à l'annulateur de $\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)$ si et seulement si $f_{\tilde{M}\omega}=0$ pour tout $\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}$. Mais c'est la définition de l'espace $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$. Cela prouve la première assertion.

Pour tout entier $n\geq -1$, notons Ann^n l'annulateur de $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$ dans $D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)$. Fixons une réunion finie $\mathcal{O}$ de classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}(F)$. On va prouver que

(5) $\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)=Ann^n\cap D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)$.

D'après ce que l'on a déjà démontré, on a

$$\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)\subset Ann^n.$$

D'autre part, par définition, on a

$$\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)\subset\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega).$$

Donc le membre de gauche de (5) est inclus dans celui de droite. On démontre l'inclusion inverse par récurrence descendante sur n. Si $n=a_{\tilde{M}_0}$, on a $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)=I(\tilde{G},\omega)$ et $Ann^n=\{0\}$ comme on l'a dit ci-dessus. L'inclusion est évidente. Supposons que $n<a_{\tilde{M}_0}$ et que l'assertion soit vérifiée pour $n+1$. Soit $\boldsymbol{\gamma}\in Ann^n\cap D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)$. Supposons d'abord F non-archimédien. On a défini en 5.1 l'espace $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$. C'est le noyau de l'application $I(\tilde{G}(F),\omega)\to I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$. La propriété (4) entraîne que l'application

$$\mathcal{F}^{n+1}I(\tilde{G}(F),\omega)\cap I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}\to\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}}I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}\cap I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$$

est surjective. Puisque $\boldsymbol{\gamma} \in Ann^n$, la distribution $\boldsymbol{\gamma}$ se factorise en une forme linéaire $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$ sur $\mathcal{F}^{n+1}I(\tilde{G}(F),\omega)/\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega) \simeq I^{n+1}_{cusp}$. Puisque $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)$, la surjectivité ci-dessus entraîne que $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$ annule le sous-espace

$$\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}} I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0} \cap I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})} \subset I^{n+1}_{cusp}.$$

On peut donc prolonger $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$ en une forme linéaire sur

$$\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}} \left(I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0} + I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}\right),$$

nulle sur

$$\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}} I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}.$$

On peut ensuite prolonger cette forme linéaire en une forme linéaire $\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}}\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}$ sur

$$I^{n+1} = \oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}} I(\tilde{M}(F),\omega).$$

Pour tout $\tilde{M}$, $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}$ annule $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}$ donc $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}} \in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_{\tilde{M}},\omega)$. La distribution

$$\boldsymbol{\gamma}' = \oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}} (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}})^{\tilde{G}}$$

appartient à $\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)$ donc annule $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$. Puisque $\oplus_{\tilde{M}\in\underline{\mathcal{L}}^{n+1}}\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}$ coïncide par construction avec $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$ sur I^{n+1}_{cusp}, $\boldsymbol{\gamma}'$ coïncide avec $\boldsymbol{\gamma}$ sur $\mathcal{F}^{n+1}I(\tilde{G}(F),\omega)$. Alors $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\gamma}'$ appartient à $Ann^{n+1} \cap D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\gamma}' \in \mathcal{F}^{n+1}D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega) \subset \mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega).$$

Donc aussi $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)$. Cela prouve (5) quand F est non-archimédien. Supposons maintenant F archimédien. Le noyau de l'application $I(\tilde{G}(F),\omega) \to I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ est maintenant l'espace $C\ell I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$ défini en 5.2. On peut reprendre le raisonnement en utilisant cet espace à la place de $I(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},0}$. Il faut vérifier que les formes linéaires que l'on construit sont continues. La continuité de $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$ résulte du fait que les espaces $\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(F),\omega)$ sont évidemment fermés et que l'isomorphisme (2) est un homéomorphisme ([R1] théorème 11.2). Il faut pouvoir choisir des $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}$ continus. Pour cela, il suffit de prouver que

(6) pour tout $\tilde{M} \in \underline{\mathcal{L}}^{n+1}$, le sous-espace

$$C\ell I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0} + I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$$

de $I(\tilde{M}(F),\omega)$ est fermé.

Le groupe $W(\tilde{M})$ agit sur $I(\tilde{M}(F),\omega)$. On peut décomposer cet espace en somme de sous-espaces isotypiques pour cette action. Chacun de ces sous-espaces est fermé et $I(\tilde{M}(F),\omega)$ en est la somme directe topologique. Notons cette décomposition

$$I(\tilde{M}(F),\omega) = \oplus_{\tau\in W(\tilde{M})^\vee} I(\tilde{M}(F),\omega)_\tau.$$

Par définition de $\mathcal{O}_{\tilde{M}}$, l'espace $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}$ est invariant par $W(\tilde{M})$, donc somme directe de ses intersections avec chacun des sous-espaces $I(\tilde{M}(F),\omega)_\tau$. Il en résulte que $C\ell I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}$ vérifie la même propriété. Notons

$$C\ell I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0} = \oplus_{\tau\in W(\tilde{M})^\vee} C\ell I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0,\tau}$$

la décomposition obtenue. Remarquons que le sous-espace d'invariants $I(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$ n'est autre que $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathbf{1}}$, où $\mathbf{1}$ est la représentation triviale de $W(\tilde{M})$. Alors

$$C\ell I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}+I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$$

est la somme directe de

$$C\ell I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}^{W(\tilde{M})}+I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$$

et des espaces $C\ell I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0,\tau}$ pour $\tau\neq 1$. Ces derniers étant fermés, il suffit de prouver que le premier l'est. Celui-ci est l'intersection de $I(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$ avec

$$C\ell I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},0}+I_{cusp}(\tilde{M}(F),\omega).$$

Puisque $I(\tilde{M}(F),\omega)^{W(\tilde{M})}$ est fermé, il suffit de prouver que le sous-espace ci-dessus est fermé. Or la propriété 5.2(3) assure que c'est l'image réciproque dans $I(\tilde{M}(F),\omega)$ du sous-espace des éléments cuspidaux de $I(\tilde{M}(F),\omega)_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},loc}$. Et celui-ci est fermé (d'après sa seconde définition, cf 5.2(3)). D'où l'assertion (6).

Modulo ces propriétés, la même preuve que dans le cas non-archimédien s'applique. Cela prouve (5) pour tout F.

Soit $\boldsymbol{\gamma}\in Ann^n$. Par définition de $D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)$, il existe une réunion finie $\mathcal{O}$ de classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}(F)$ telle que $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)$. En appliquant (5), on obtient

$$\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)\subset\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega).$$

D'où l'inclusion $Ann^n\subset\mathcal{F}^nD_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)$. On a déjà prouvé l'inclusion réciproque. D'où l'égalité de ces espaces, ce qui est la deuxième assertion de (i). Grâce à cette assertion, le (ii) de l'énoncé n'est autre que (5). $\square$

5.4 Distributions géométriques stables dans le cas non-archimédien

Supposons F non-archimédien et $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On note $D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F))$ le sous-espace des éléments de $D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F))$ qui se factorisent en une forme linéaire sur $SI(\tilde{G}(F))$. Soit $\mathcal{O}$ une réunion finie de classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$. On note $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})=D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F))\cap D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})$. Notons $SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$ le sous-espace des éléments $f\in SI(\tilde{G}(F))$ pour lesquels il existe un voisinage $\tilde{U}$ de $\mathcal{O}$ tel que $S^{\tilde{G}}(\gamma,f)=0$ pour tout $\gamma\in\tilde{U}$. Posons $SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}=SI(\tilde{G}(F))/SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$. On a encore

(1) $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})$ est l'espace des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui se factorisent par la projection $C_c^\infty(\tilde{G}(F))\to SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$.

On a aussi

(2) $D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F))$ est la somme directe des sous-espaces $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})$ quand $\mathcal{O}$ décrit les classes de conjugaison stable semi-simples.

Preuve. Soit $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F))$. Les parties semi-simples des éléments de son support restent dans un ensemble fini de classes de conjugaison stable. Notons $\mathcal{O}_1,...,\mathcal{O}_n$ ces classes. En utilisant la construction de 4.6, on peut trouver pour chaque $i=1,...,n$ un voisinage ouvert et fermé $\tilde{U}_i$ de $\mathcal{O}_i$ de sorte que

- $\tilde{U}_i\cap\tilde{U}_j=\emptyset$ si $i\neq j$;

- si $\gamma, \gamma' \in \tilde{G}_{reg}(F)$ sont stablement conjugués, alors $\gamma \in \tilde{U}_i$ si et seulement si $\gamma' \in \tilde{U}_i$.

On note $\mathbf{1}_{\tilde{U}_i}$ la fonction caractéristique de $\tilde{U}_i$ et $\boldsymbol{\delta}_i$ la distribution $f \mapsto \boldsymbol{\delta}(f\mathbf{1}_{\tilde{U}_i})$. Elle est encore stable d'après la seconde condition ci-dessus. Elle appartient clairement à $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}_i)$. Enfin, $\boldsymbol{\delta}$ est la somme des $\boldsymbol{\delta}_i$ d'après la première condition ci-dessus. $\square$

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. L'application d'induction préserve la stabilité (parce que, si $f \in I(\tilde{G}(F))$ a une image nulle dans $SI(\tilde{G}(F))$, alors l'image de $f_{\tilde{M}}$ dans $SI(\tilde{M}(F))$ est nulle). On a donc un homomorphisme d'induction

$$\begin{array}{ccc} D^{st}_{géom}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^* & \to & D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^* \\ \boldsymbol{\delta} & \mapsto & \boldsymbol{\delta}^{\tilde{G}} \end{array}$$

5.5 Distributions géométriques stables dans le cas archimédien

On suppose F archimédien et $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On note $D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F))$ le sous-espace des éléments de $D_{géom}(\tilde{G}(F))$ qui se factorisent en une forme linéaire sur $SI(\tilde{G}(F))$. En adaptant la construction du paragraphe 5.2, on munit $SI(\tilde{G}(F))$ d'une topologie. L'espace $D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F))$ s'identifie à celui des formes linéaires continues sur cet espace qui sont supportées par la réunion d'un nombre fini de classes de conjugaison stable semi-simples. Pour une telle réunion finie $\mathcal{O}$, on définit les espaces $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ et $SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$ comme dans le cas non-archimédien. On note $C\ell SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$ sa clôture dans $SI(\tilde{G}(F))$ et le quotient $SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc} = SI(\tilde{G}(F))/C\ell SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},0}$. On a comme en 5.2(2)

(1) $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ s'identifie à l'espace des formes linéaires continues sur $SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$.

La preuve de 5.2(3) s'adapte :

(2) les deux définitions possibles d'un espace $SI_{cusp}(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$ sont équivalentes.

Enfin, on a

(3) $D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F))$ est la somme directe des sous-espaces $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$, quand $\mathcal{O}$ décrit les classes de conjugaison stable semi-simples.

La preuve de 5.4(2) s'adapte, en remplaçant les fonctions $\mathbf{1}_{\tilde{U}_i}$ par des fonctions C^∞ convenables.

Décrivons concrètement l'espace $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ dans le cas où $F = \mathbb{R}$ et où $\mathcal{O}$ est une unique classe de conjugaison stable. On doit fixer $\eta \in \mathcal{O}$ tel que G_η soit quasi-déployé. On choisit un ensemble $\tilde{\mathcal{T}}$ de sous-tores tordus maximaux de $\tilde{G}$ de sorte que

• $\eta \in \tilde{T}(\mathbb{R})$ pour tout $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$;

• pour tout sous-tore maximal S de G_η, il existe $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$ et il existe $g \in Z_G(\eta)$ tels que $S = ad_g(T)$ et l'isomorphisme $ad_g : T \to S$ soit défini sur $\mathbb{R}$.

En remplaçant les intégrales orbitales par les intégrales orbitales stables dans les définitions de 5.2, l'espace $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))_{\mathcal{O},loc}$ s'identifie à un sous-espace de l'espace

$$\oplus_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}, \Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}}} \mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]].$$

Grâce aux résultats de Shelstad, on peut encore le caractériser par des conditions similaires à 5.2(7) et (8). On construit de même une application linéaire

$$\oplus_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}, \Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}}} D[\mathfrak{t}(\mathbb{R})] \to SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))_{\mathcal{O},loc}$$

dont l'image est $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$.

L'écriture des intégrales orbitales stables comme somme d'intégrales orbitales fournit une application linéaire surjective

$$\oplus_{\mathcal{O}'} I(\tilde{G}(\mathbb{R}))_{\mathcal{O}',loc} \to SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))_{\mathcal{O},loc},$$

où $\mathcal{O}'$ décrit les classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ contenues dans $\mathcal{O}$. Dualement, on a une application linéaire injective

$$D^{st}_{géom}(\mathcal{O}) \to D_{géom}(\mathcal{O}) = \oplus_{\mathcal{O}'} D_{géom}(\mathcal{O}').$$

5.6 Constructions formelles

Le corps F est quelconque et $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. On suppose donnée une extension

$$1 \to C_1 \to G_1 \to G \to 1$$

où C_1 est un tore central induit, une extension compatible

$$\tilde{G}_1 \to \tilde{G}$$

avec $\tilde{G}_1$ à torsion intérieure, et un caractère λ_1 de $C_1(F)$.

En adaptant les définitions des paragraphes précédents, on définit les espaces de distributions $D_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F))$ et $D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F))$. Leurs éléments sont des formes linéaires respectivement sur $I_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(F))$ et $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(F))$. De même, pour une réunion finie $\mathcal{O}$ de classes de conjugaison semi-simples dans $\tilde{G}(F)$, on définit des espaces localisés que l'on note $I_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(F))_{\mathcal{O},loc}$ et $D_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F), \mathcal{O})$. Si $\mathcal{O}$ est une réunions finie de classes de conjugaison stable, on a les variantes $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(F))_{\mathcal{O},loc}$ et $D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F), \mathcal{O})$.

Décrivons concrètement $D_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F), \mathcal{O})$ quand $F = \mathbb{R}$ et $\mathcal{O}$ est une unique classe de conjugaison. On fixe cette fois $\eta_1 \in \tilde{G}_1(\mathbb{R})$ se projetant en un élément de $\mathcal{O}$. Remplaçons $\tilde{G}$ par $\tilde{G}_1$ et η par η_1 dans les constructions de 5.2 pour définir un ensemble $\tilde{\mathcal{T}}_1$ et, pour tout $\tilde{T}_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1$, un ensemble $\underline{\Omega}_{\tilde{T}_1}$. Pour $f \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))$, on définit la famille

$$(\varphi_{f,\tilde{T}_1,\Omega})_{\tilde{T}_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1, \Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}_1}} \in \oplus_{\tilde{T}_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1, \Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}_1}} \mathbb{C}[[\mathfrak{t}_1(\mathbb{R})]]$$

comme en 5.2. Alors $I_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))_{\mathcal{O},loc}$ est l'espace de ces familles quand f décrit $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))$. On peut décrire cet espace comme celui des familles de séries formelles $(\varphi_{\tilde{T}_1,\Omega})_{\tilde{T}_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1, \Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}_1}}$ qui vérifient la condition 5.2(8) et les conditions (1) et (2) suivantes.

(1) Soient $\tilde{T}_1, \tilde{T}'_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1$, $g_1 \in G_1(\mathbb{R})$ et $c \in C_1(\mathbb{R})$ tels que $g_1\eta_1 g_1^{-1} = c\eta_1$ et $ad_{g_1}(\tilde{T}_1) = \tilde{T}'_1$; pour tout $\Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}_1}$, on a $\varphi_{\tilde{T}'_1, ad_{g_1}(\Omega)} = \lambda_1(c)^{-1} ad_{g_1}(\varphi_{\tilde{T}_1,\Omega})$.

Remarquons que cette condition est plus forte que 5.2(7). Pour tout $\tilde{T}_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1$, on peut fixer une décomposition $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{c}_1$ de sorte que $\mathfrak{t}$ contienne l'intersection de $\mathfrak{t}_1$ avec l'algèbre de Lie du groupe dérivé de G_1. On a alors une application injective

$$\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]] \otimes \mathbb{C}[[\mathfrak{c}_1(\mathbb{R})]] \to \mathbb{C}[[\mathfrak{t}_1(\mathbb{R})]].$$

En développant en série formelle le caractère λ_1^{-1}, on obtient un élément φ_{λ_1} de $\mathbb{C}[[\mathfrak{c}_1(\mathbb{R})]]$. Alors

(2) pour tout $\Omega \in \underline{\Omega}_1$, il existe $\varphi_{\tilde{T},\Omega} \in \mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]$ tel que $\varphi_{\tilde{T}_1,\Omega} = \varphi_{\tilde{T},\Omega}\varphi_{\lambda_1}$.

De nouveau, on a une application linéaire

$$\oplus_{\tilde{T}_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1, \Omega \in \underline{\Omega}_{\tilde{T}_1}} D[\mathfrak{t}_1(\mathbb{R})] \to (I_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))_{\mathcal{O},loc})^*.$$

L'espace $D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}), \mathcal{O})$ est l'image de cette application.

Notons $\mathcal{O}_1$ la classe de conjugaison par $G_1(\mathbb{R})$ engendrée par γ_1. Il résulte des descriptions ci-dessus que

$$I_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))_{\mathcal{O},loc} \subset I(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))_{\mathcal{O}_1,loc}$$

et qu'il y a une application linéaire naturelle et surjective

$$D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_1) \to D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}), \mathcal{O}).$$

Supposons toujours $F = \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple. On suppose G_{1,η_1} quasi-déployé. Les espaces $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))_{\mathcal{O},loc}$ et $D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}), \mathcal{O})$ se décrivent comme précédemment, avec de légères variantes. On a les mêmes conséquences que ci-dessus, à savoir que l'on a l'inclusion

$$SI_{\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))_{\mathcal{O},loc} \subset SI(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))_{\mathcal{O}_1,loc}$$

et qu'il y a une application linéaire naturelle et surjective

$$D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_1) \to D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}), \mathcal{O}).$$

On revient à un corps de base F quelconque. Considérons une autre série de données $G_2, \tilde{G}_2, C_2, \lambda_2$ vérifiant les mêmes hypothèses. Notons G_{12} le produit fibré de G_1 et G_2 au-dessus de G et $\tilde{G}_{12}$ celui de $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ au-dessus de $\tilde{G}$. Considérons un caractère continu λ_{12} de $G_{12}(F)$ dont la restriction à $C_1(F) \times C_2(F)$ soit $\lambda_1 \times \lambda_2^{-1}$ et une fonction non nulle $\tilde{\lambda}_{12}$ sur $\tilde{G}_{12}(F)$ telle que $\tilde{\lambda}_{12}(g\gamma) = \lambda_{12}(g)\tilde{\lambda}_{12}(\gamma)$ pour tous $g \in G_{12}(F)$ et $\gamma \in \tilde{G}_{12}(F)$. On a alors un isomorphisme

$$C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F)) \simeq C^\infty_{c,\lambda_2}(\tilde{G}_2(F))$$

qui, à f_1 sur $\tilde{G}_1(F)$, associe la fonction f_2 sur $\tilde{G}_2(F)$ telle que $f_2(\gamma_2) = f_1(\gamma_1)\tilde{\lambda}_{12}(\gamma_1, \gamma_2)$ pour tous $(\gamma_1, \gamma_2) \in \tilde{G}_{12}(F)$. Remarquons que, dans le cas archimédien, il s'agit d'un homéomorphisme, $\tilde{\lambda}_{12}$ étant nécessairement C^∞. On voit que l'isomorphisme ci-dessus se dualise en un isomorphisme

$$D_{g\acute{e}om,\lambda_2}(\tilde{G}_2(F)) \simeq D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F))$$

qui se restreint en un isomorphisme

$$D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_2}(\tilde{G}_2(F)) \simeq D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}_1(F)).$$

Revenons au cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque. Soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique relevante pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Des constructions ci-dessus se déduisent la définition de l'espace $D_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}')$ et de son sous-espace $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}')$. Leurs éléments sont des formes linéaires sur $I(\mathbf{G}')$, resp. $SI(\mathbf{G}')$, continues dans le cas où F est archimédien. Soit $\mathcal{O}'$ une réunion finie de classes de conjugaison stable semi-simples de $\tilde{G}'(F)$. On définit comme en 5.4 le sous-espace $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}', \mathcal{O}') \subset D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}')$, l'espace $SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}',0}$, sa clôture $C\ell SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}',0}$ dans le cas archimédien, et le quotient

$$SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}',loc} = \left\{ \begin{array}{ll} SI(\mathbf{G}')/SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}',0}, & \text{si } F \text{ est non-archimédien} \\ SI(\mathbf{G}')/C\ell SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}',0}, & \text{si } F \text{ est archimédien.} \end{array} \right.$$

L'espace $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}', \mathcal{O}')$ est celui des formes linéaires sur $C^\infty_c(\mathbf{G}')$ qui se factorisent en une forme linéaire (continue dans le cas archimédien) sur $SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}',loc}$.

5.7 Transfert de distributions "géométriques"

Si F est non-archimédien ou $F = \mathbb{C}$, soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{G}(F)$. On a défini l'espace $D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega) \subset D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F),\omega)$. Si $F = \mathbb{R}$, on doit travailler ici avec un K-espace $K\tilde{G}$. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $K\tilde{G}(\mathbb{R})$. On définit l'espace $D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega) \subset D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, somme directe des $D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_p,\omega)$ pour $p \in \Pi$, où $\mathcal{O}_p = \mathcal{O} \cap \tilde{G}_p(\mathbb{R})$ ($\mathcal{O}_p$ peut être vide). Pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, il correspond à $\mathcal{O}$ une réunion finie $\mathcal{O}_{\tilde{G}'}$ de classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{G}'(F)$, qui peut être vide. Considérons l'espace

(1) $\oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_{\tilde{G}'}) \otimes Mes(G'(F))^*$.

Nous allons en définir différents sous-espaces. Soient $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ et M' un Levi de G'. On note $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$ la réunion des classes de conjugaison stables semi-simples dans $\tilde{M}'(F)$ qui sont incluses dans $\mathcal{O}_{\tilde{G}'}$. En fixant des données supplémentaires G'_1,...,Δ_1, on dispose de l'application

$$\begin{array}{ccc} SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)) \otimes Mes(G'(F)) & \to & SI_{\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F)) \otimes Mes(M'(F)) \\ f & \mapsto & f_{\tilde{M}'_1} \end{array}$$

Par dualité, on en déduit un homomorphisme

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F),\mathcal{O}_{\tilde{M}'}) \otimes Mes(M'(F))^* & \to & D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F),\mathcal{O}_{\tilde{G}'}) \otimes Mes(G'(F))^* \\ \boldsymbol{\delta} & \mapsto & \boldsymbol{\delta}^{\tilde{G}'} \end{array}$$

où les espaces de distributions sont définis de façon évidente. Le second espace s'identifie à l'espace déjà défini $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'})$. L'espace $D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F),\mathcal{O}_{\tilde{M}'})$ et l'homomorphisme ci-dessus ne sont a priori définis que modulo le choix de données auxiliaires. On vérifie toutefois que l'image de cet homomorphisme dans $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'}) \otimes Mes(G'(F))^*$ ne dépend pas de ce choix. On note cette image $\mathcal{I}^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\mathcal{O}_{\tilde{M}'})$. Supposons que M' soit relevant. Soit $(\tilde{M},\mathbf{M}')$ l'élément de $\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$ qui lui est associé par la construction de 3.4. On identifie $\tilde{M}'$ à l'espace endoscopique issu de $\mathbf{M}'$. Remarquons qu'il y a deux façons de définir un ensemble $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$: soit, comme on l'a fait, par une suite $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}_{\tilde{G}'} \mapsto \mathcal{O}_{\tilde{M}'}$, soit par une suite $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}_{\tilde{M}} \mapsto \mathcal{O}_{\tilde{M}'}$. Les deux procédés donnent le même résultat. L'espace $D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{M}'_1,\mathcal{O}_{\tilde{M}'})$ s'identifie à l'espace $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'})$ relatif à $\mathbf{M}'$. Toutefois, l'homomorphisme ci-dessus dépend du choix de l'identification. Le groupe $Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')$ agit sur $SI(\mathbf{M}')$. Il résulte de la définition de $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$ que cette action préserve $SI(\mathbf{M}')_{\mathcal{O}_{\tilde{M}'},0}$ et sa clôture dans le cas archimédien. Donc l'action se descend en une action sur $SI(\mathbf{M}')_{\mathcal{O}_{\tilde{M}'},loc}$ et il y a aussi une action duale sur $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'})$. On décompose cet espace en la somme du sous-espace des invariants $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ et de son unique supplémentaire invariant par l'action du groupe. On note $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{non-inv}$ ce supplémentaire et $\mathcal{I}^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{non-inv}$ son image par l'homomorphisme (2). On vérifie que ce dernier espace ne dépend pas des choix. Enfin, on vérifie que la restriction de (2) au sous-espace des invariants devient un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')} \otimes Mes(M'(F))^* & \to & D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'}) \otimes Mes(G'(F))^* \\ \boldsymbol{\delta} & \mapsto & \boldsymbol{\delta}^{\tilde{G}'} \end{array}$$

qui est indépendant des choix.

On considère les sous-espaces suivants de l'espace (1) :

(3) les espaces $\mathcal{I}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'}(\mathcal{O}_{\tilde{M}'})$, pour un $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ et un Levi M' de G' qui n'est pas relevant ;

(4) les espaces $\mathcal{I}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'}(\mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{non-inv}$, pour un $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ et un Levi M' de G' qui est relevant ;

(5) les espaces images d'un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')}\otimes Mes(M'(F))^* & \to & D^{st}_{géom}(\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'})\otimes Mes(G'(F))^* \\ & & +D^{st}_{géom}(\underline{\mathbf{G}}',\mathcal{O}_{\underline{\tilde{G}}'})\otimes Mes(\underline{G}'(F))^* \\ \boldsymbol{\delta} & \mapsto & \boldsymbol{\delta}^{G'}-\boldsymbol{\delta}^{\underline{G}'} \end{array}$$

pour deux éléments $\mathbf{G}',\underline{\mathbf{G}}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ et un Levi commun M' qui est relevant.

Remarque. Précisément, dans cette dernière condition, on considère $\mathbf{G}',\underline{\mathbf{G}}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, des Levi M' de G' et $\underline{M}'$ de $\underline{G}'$ et on suppose que l'élément $(\tilde{M},\mathbf{M}')$ de $\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$ associé à ces Levi est le même. Mais les données $\mathbf{G}'$ et $\underline{\mathbf{G}}'$ peuvent être les mêmes, un même élément $(\tilde{M},\mathbf{M}')$ pouvant être associé à deux Levi distincts du même groupe G'. Par exemple, si $G=SO(11)$ et $G'=SO(5)\times SO(7)$, aux Levi $GL(2)\times(GL(1)\times GL(1)\times GL(1))$ et $(GL(1)\times GL(1))\times(GL(2)\times GL(1))$ de G' est associé le même élément de $\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$. Si les données $\mathbf{G}'$ et $\underline{\mathbf{G}}'$ sont les mêmes, les applications $\boldsymbol{\delta}\mapsto\boldsymbol{\delta}^{G'}$ et $\boldsymbol{\delta}\mapsto\boldsymbol{\delta}^{\underline{G}'}$ sont à valeurs dans le même espace mais ne sont pas forcément les mêmes comme le montre l'exemple ci-dessus (et malgré la notation imprécise qui pourrait le faire croire).

Proposition. *Par dualité, le transfert définit une application linéaire*

$$transfert:\oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})}D^{st}_{géom}(\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'})\otimes Mes(G'(F))^*\to D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(G(F))^*.$$

Elle est surjective. Son noyau est la somme des sous-espaces décrits ci-dessus.

La preuve est donnée dans les deux paragraphes suivants.

5.8 Preuve dans le cas non-archimédien

On suppose F non-archimédien. Pour simplifier, on fixe des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant, ce qui élimine les espaces de mesures. Définissons un espace $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$. C'est le sous-espace des éléments $(f_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),loc})\in\oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})}SI(\mathbf{M}')_{\mathcal{O}_{\tilde{M}'},loc}$ qui vérifient les conditions (1), (2) et (3) de 4.11. Ces conditions conservent un sens pour nos espaces "localisés". On note $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ la projection naturelle de $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ dans $\oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})}SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}_{\tilde{G}'},loc}$. Il y a un diagramme naturel de localisation

$$\begin{array}{ccc} I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega) & \to & I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc} & \to & I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc} \end{array}$$

qui est commutatif. Montrons que

(1) les flèches verticales de ce diagramme sont surjectives.

Par définition, les flèches horizontales le sont. Il suffit donc de prouver que la flèche verticale de gauche l'est. Soit $(f_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),loc})\in I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$. On relève chaque $f_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),loc}$ en un élément $f_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}\in SI(\mathbf{M}')$. On peut remplacer cet élément par la moyenne de ses images par l'action de $Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')$. Cela nous permet de supposer que $f_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ est invariant par ce groupe. Soient $\mathbf{G}'$ et $(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ vérifiant les hypothèses de la condition (2) de 4.11. Fixons des données auxiliaires $G'_1,...,\Delta_1$. Cette condition affirme l'égalité $S^{\tilde{G}'_1}(\delta_1, f_{\mathbf{G}'}) = S^{\tilde{M}'_1}(\delta_1, f_{(\tilde{M},\mathbf{M}')})$ pour tout $\delta_1 \in \tilde{M}'_1(F)$ assez régulier. Elle n'est pas forcément vérifiée par les fonctions que l'on vient d'introduire. Mais, parce que la famille de départ appartient à $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc}$, elle l'est si l'image δ de δ_1 dans $\tilde{M}'(F)$ est assez proche de $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$. Fixons un voisinage $\tilde{V}$ de $\mathcal{O}$ dans $\tilde{G}(F)$, ouvert et fermé et tel que $\tilde{V} \cap \tilde{G}_{ss}(F)$ soit invariant par conjugaison stable (un tel voisinage existe, cf. 4.6). De même que de $\mathcal{O}$, on a déduit $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$, de $\tilde{V}$ se déduit un voisinage $\tilde{V}_{\tilde{M}'}$ de $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$ dans $\tilde{M}'(F)$. Remplaçons chaque fonction $f_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ par son produit avec la fonction caractéristique de $\tilde{V}_{\tilde{M}'}$. Si $\tilde{V}$ est assez petit, alors l'égalité d'intégrales orbitales ci-dessus est vérifiée pour tout δ_1, autrement dit la condition 4.11(2) est satisfaite. Un même raisonnement s'applique à la condition 4.11(3). Donc la famille $(f_{(\tilde{M},\mathbf{M}')})$ appartient à $I_+^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F), \omega)$. Cela prouve (1).

Il y a un diagramme commutatif naturel de localisation

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(F), \omega) & \stackrel{tr}{\to} & \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc} & \stackrel{tr_{loc}}{\to} & \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}'},loc} \end{array}$$

où tr est le transfert. D'après la proposition 4.11, l'image de tr est $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F), \omega)$. Grâce à (1), celle de tr_{loc} est donc $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc}$. Montrons que

(3) l'homomorphisme tr_{loc} est injectif.

Soit $f \in I(\tilde{G}(F), \omega)$ dont l'image dans $I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc}$ appartient au noyau de tr_{loc}. Les intégrales orbitales de f en des éléments fortement réguliers se calculent par inversion de Fourier à partir des intégrales orbitales stables des fonctions $f^{\mathbf{G}'}$ pour $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$. On a expliqué cela en 4.9(5) pour les éléments elliptiques mais cela vaut pour tout élément puisque tout élément est elliptique dans un espace de Levi convenable. L'hypothèse implique donc que $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$ assez proche de $\mathcal{O}$. Par définition, cela signifie que l'image de f dans $I(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc}$ est nulle. Cela prouve (3).

La commutativité du diagramme (2) entraîne que le transfert "dual", restreint à $\oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}', \mathcal{O}_{\tilde{G}'})$, se factorise par le dual

$$tr^*_{loc} : \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{G}', \mathcal{O}_{\tilde{G}'}) \to D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}, \omega)$$

de tr_{loc}. L'assertion (3) entraîne que tr^*_{loc} est surjective. Posons pour simplifier $X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')} = D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}', \mathcal{O}_{\tilde{M}'})$ pour tout $(\tilde{M}, \mathbf{M}') \in \mathcal{E}_+(\tilde{G}, \mathbf{a})$, $X_+ = \oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}') \in \mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})} X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$, $X = \oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} X_{\mathbf{G}'}$, $Y = \oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}') \in \mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a}), \tilde{M} \neq \tilde{G}} X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$, $I = I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc}$, $I_+ = I^{\mathcal{E}}_+(\tilde{G}(F), \omega)_{\mathcal{O},loc}$. Le noyau de tr^*_{loc} est l'annulateur de I dans X. Puisque I est la projection sur $\oplus_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}'},loc}$ de I_+, cet annulateur est l'intersection avec X de l'annulateur de I_+ dans X_+. L'espace I_+ est défini par différentes conditions qui définissent chacune des sous-espaces. Son annulateur est la somme des annulateurs de ces sous-espaces. La condition 4.11(1) (ou plutôt son analogue localisée) fournit l'annulateur

(4) $X^{non-inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')} = D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}', \mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{non-inv} \subset X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$

pour tout $(\tilde{M}, \mathbf{M}') \in \mathcal{E}_+(\tilde{G}, \mathbf{a})$. La condition 4.11(2) founit pour annulateur l'image de l'application

$$\begin{array}{ccc} X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')} & \to & X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')} \oplus X_{\mathbf{G}'} \\ \delta & \mapsto & (\delta, -\delta^{\tilde{G}'}) \end{array}$$

pour $(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$ et $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ tel que M' est un Levi propre de G' (pour être correct, il faut choisir des données auxiliaires pour définir l'application ci-dessus). La somme de l'espace (4) avec cette image est aussi la somme de cet espace (4) et des deux espaces suivants :

(5) l'image par $\delta\mapsto\delta^{\tilde{G}'}$ de $X^{non-inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$; cette image est $\mathcal{I}^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{non-inv}\subset X_{\mathbf{G}'}$;

(6) l'image de l'application

$$\begin{array}{ccc} X^{inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}=D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'})^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')} & \to & X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}\oplus X_{\mathbf{G}'}\\ \delta & \mapsto & (\delta,-\delta^{\tilde{G}'}). \end{array}$$

La condition 4.11(3) fournit pour annulateur l'espace

(7) $\mathcal{I}^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\mathcal{O}_{\tilde{M}'})\subset X_{\mathbf{G}'}$,

pour tout $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ et tout Levi M' de G' qui n'est pas relevant. Les espaces (7) sont les mêmes qu'en 5.7(3). Les espaces (4) pour $\tilde{M}=\tilde{G}$ ou (5) pour $\tilde{M}\neq\tilde{G}$ sont les mêmes qu'en 5.7(4). Ces espaces sont inclus dans X. Il reste à prouver que l'intersection avec X de la somme des espaces (6) et (4) pour $\tilde{M}\neq\tilde{G}$ est la somme des espaces 5.7(5). Un élément de cette intersection est une somme sur $(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$, $\tilde{M}\neq\tilde{G}$, de termes

$$x_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}=\delta^{non-inv}+\sum_{i=1,\dots,n}(\delta_i,-\delta_i^{\mathbf{G}'_i}),$$

où $\delta^{non-inv}\in X^{non-inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$, $\delta_i\in X^{inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ pour tout i et où on a noté $\mathbf{G}'_1,\dots,\mathbf{G}'_n$ les éléments de $\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ dont M' est un Levi (ces termes ne sont pas forcément distincts, cf. la remarque suivant 5.7(5)). Fixons $(\tilde{M},\mathbf{M}')$ et projetons sur $X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$. Cette projection doit être nulle. Cela entraîne que la projection de $x_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ est nulle. Avec les notations ci-dessus, on a $\delta^{non-inv}=0$ et $\sum_{i=1,\dots,n}\delta_i=0$. Alors

$$x_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}=\sum_{i=1,\dots,n-1}\Big((\delta_1+\dots+\delta_i)^{\mathbf{G}'_{i+1}}-(\delta_1+\dots+\delta_i)^{\mathbf{G}'_i}\Big)$$

qui appartient à la somme des espaces 5.7(5). La réciproque est claire. Cela achève la preuve. $\square$

5.9 Preuve dans le cas archimédien

On suppose $F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour unifier les notations, on pose $K\tilde{G}=\tilde{G}$ si $F=\mathbb{C}$. On fixe des mesures de Haar sur tous les groupes qui interviennent. On définit l'espace $I^{\mathcal{E}}_+(\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}\subset\oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})}SI(\mathbf{M}')_{\mathcal{O}_{\tilde{M}'}}$ comme dans le cas non-archimédien mais on le note plutôt $I^{\mathcal{E}}_+(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$. On note $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ sa projection dans $\oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})}SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}_{\tilde{G}'},loc}$. Remarquons que ces espaces, ainsi que les espaces non localisés $I^{\mathcal{E}}_+(K\tilde{G}(F),\omega)$ et $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)$, qui sont définis comme sous-espaces de certains espaces topologiques, sont fermés dans ceux-ci. On a un diagramme naturel de localisation

$$\begin{array}{ccc} I^{\mathcal{E}}_+(K\tilde{G}(F),\omega) & \to & I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)\\ \downarrow & & \downarrow\\ I^{\mathcal{E}}_+(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc} & \to & I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc} \end{array}$$

qui est commutatif. Montrons que

(1) les flèches verticales de ce diagramme sont surjectives.

Il suffit de prouver que celle de gauche l'est. On a une filtration sur $I_+^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)$ dont le gradué est décrit par 4.12(2). En fait, on a prouvé que les inclusions de cette relation étaient des égalités. Le même procédé définit une filtration sur $I_+^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ et on a

$$(2) \qquad Gr\, I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc} \subset \oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})} SI_{cusp}(\mathbf{M}')_{\mathcal{O}_{\tilde{M}'},loc}^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')}.$$

Remarque. Cette description est facile à condition d'utiliser pour les espaces de droite leur "deuxième" définition, cf. 5.4(3). Mais d'après la propriété 5.5(2), la première définition convient aussi bien.

La flèche verticale de gauche est compatible aux filtrations et définit une flèche

$$Gr\, I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega) \to Gr\, I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}.$$

D'après 4.12(2) (qui est une égalité) et 5.5(2), $Gr\, I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)$ s'envoie surjectivement sur le membre de droite de (2). Il en résulte que l'homomorphisme ci-dessus entre gradués est surjectif. Donc la flèche verticale de gauche du diagramme est aussi surjective. □

Remarquons que ce raisonnement prouve aussi que (2) est une égalité.

Il y a un diagramme naturel de localisation

$$\begin{array}{ccc} I(K\tilde{G}(F),\omega) & \stackrel{tr}{\to} & \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ I(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc} & \stackrel{tr_{loc}}{\to} & \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}')_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}'},loc} \end{array}$$

Grâce à (1) et à la proposition 4.11, l'image de tr_{loc} est $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$. On a

(3) l'homomorphisme tr_{loc} définit un homéomorphisme de $I(K\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$ sur $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$.

Preuve. L'homomorphisme tr se calcule par une formule explicite comme on en a utilisé en 4.13. Il résulte de cette formule que tr est continue pourvu que les facteurs de transfert soient des fonctions C^∞. Or cela résulte du lemme 2.8. Donc tr est continue. Il en résulte que tr_{loc} l'est aussi. Soit $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}} \in I(K\tilde{G}(F),\omega)$. Supposons que son image dans $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ soit nulle. L'élément $tr(\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}})$ a un développement infinitésimal nul en tout point correspondant à un élément de $\mathcal{O}$. Par une formule d'inversion généralisant 4.9(5) au cas non elliptique, la fonction $\varphi_{\tilde{\mathcal{T}}}$ a elle-même un développement infinitésimal nul en tout élément de $\mathcal{O}$. Donc son image dans $I(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ est nulle. Cela prouve que tr_{loc} est injectif. Donc tr_{loc} est une bijection continue de $I(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ sur $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$. Or ces deux espaces sont des espaces de Fréchet. Une telle bijection est donc nécessairement ouverte. □

Grâce à (3), l'application duale

$$tr_{loc}^* : \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} D_{géom}^{st}(\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'}) \to D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$$

se quotiente en un isomorphisme de l'espace de départ quotienté par l'annulateur de $I^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ sur l'espace d'arrivée. Il reste à prouver que cet annulateur est la somme des espaces décrits avant l'énoncé de la proposition 5.7. Le même raisonnement que dans le cas non-archimédien nous ramène à prouver que l'annulateur de $I_+^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ est la somme des espaces décrits en 5.8(4), (5), (6) et (7). Notons Ann l'annulateur de $I_+^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)$ et $Ann^?$ la somme de ces espaces . L'espace $I_+^{\mathcal{E}}(K\tilde{G}(F),\omega)_{\mathcal{O},loc}$ est intersection finie de sous-espaces et $Ann^?$ n'est autre que la somme des annulateurs de ces sous-espaces. Mais, à cause de la topologie, il n'est pas complètement évident que l'annulateur de l'intersection soit la somme des annulateurs. On va le prouver.

Considérons d'abord le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. L'espace $SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$ est inclus dans $I^{\mathcal{E}}(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$ (il correspond à la donnée maximale $\mathbf{G}$). Restreinte à ce sous-espace, l'inclusion (2), dont on a prouvé que c'était une égalité, donne une égalité

$$(4)\qquad Gr\,SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}=\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}}SI_{cusp}(\tilde{M}(F))^{W(M)}_{\mathcal{O}_{\tilde{M}},loc},$$

où $\underline{\mathcal{L}}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de Levi. L'application naturelle du terme de gauche dans celui de droite est continue. Puisque nos ensembles sont des espaces de Fréchet, c'est un homéomorphisme. Pour tout Levi M, notons $\mathcal{I}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})$ l'image de l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc}D^{st}_{géom}(\mathcal{O}_{\tilde{M}}) & \to & D^{st}_{géom}(\mathcal{O})\\ \delta & \mapsto & \delta^{\tilde{G}}\end{array}$$

Notons $\mathcal{I}^{\tilde{G}}(\mathcal{O})$ la somme de ces espaces $\mathcal{I}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})$ pour $M\neq G$. On peut se limiter aux $M\in\underline{\mathcal{L}}$. Le fait que (4) soit un homéomorphisme implique que $\mathcal{I}^{\tilde{G}}(\mathcal{O})$ est l'annulateur dans $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ du sous-espace $SI_{cusp}(\tilde{G})_{\mathcal{O},loc}$. Le même résultat vaut pour tout Levi M. L'action du groupe $W(M)$ préserve $\mathcal{I}^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})$. Fixons un supplémentaire $D^{st}_{géom,cusp}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})$ de ce sous-espace, invariant par l'action de ce groupe, notons $\mathcal{I}^{\tilde{G}}_{\tilde{M},cusp}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})^{inv}$ son image dans $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ par l'application ci-dessus. Par dualité, on déduit de (4) l'égalité

$$D^{st}_{géom}(\mathcal{O})=\oplus_{M\in\underline{\mathcal{L}}}\mathcal{I}^{\tilde{G}}_{\tilde{M},cusp}(\mathcal{O}_{\tilde{M}})^{inv}.$$

Revenons au cas général. Ce que l'on vient de dire s'adapte aux espaces $SI(\mathbf{M}')$ pour $(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})$, munis cette fois de l'action de $Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')$. En particulier, on fixe un sous-espace $X_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),cusp}\subset X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}=D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'})$, qui est un supplémentaire de la somme des espaces induits à partir de Levi propres de M' et qui est invariant par $Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')$. On note $X^{inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),cusp}$ son sous-espace des invariants par ce groupe. Cet espace s'identifie à celui des formes linéaires continues sur $SI_{cusp}(\mathbf{M}')^{Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')}_{\mathcal{O}_{\tilde{M}'},loc}$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la bijection (2) est un isomorphisme. Par dualité, on en déduit que le sous-espace

$$X_{++}=\oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})}X^{inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),cusp}\subset X_+=\oplus_{(\tilde{M},\mathbf{M}')\in\mathcal{E}_+(\tilde{G},\mathbf{a})}X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$$

s'identifie par restriction à l'espace des formes linéaires continues sur $I^{\mathcal{E}}_+(K\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$. En particulier $Ann\cap X_{++}=\{0\}$. Il est clair que $Ann^?$ est inclus dans Ann. Pour prouver que cette inclusion est une égalité, il suffit de prouver que $X_+=X_{++}+Ann^?$. On démontre par récurrence descendante sur le corang de $\tilde{M}$ que $X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ est inclus dans $X_{++}+Ann^?$. Fixons $(\tilde{M},\mathbf{M}')$. L'espace $X_{(\tilde{M},\mathbf{M}')}$ est somme de $X^{inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),cusp}$, de son supplémentaire $X^{non-inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),cusp}$ conservé par $Aut(\tilde{M},\mathbf{M}')$ dans $X_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),cusp}$ et des sous-espaces obtenus par induction à partir de Levi propres de M'. Le premier espace $X^{inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),cusp}$ est contenu dans X_{++}. Le deuxième $X^{non-inv}_{(\tilde{M},\mathbf{M}'),cusp}$ est inclus dans $Ann^?$ (5.8(4)). Fixons un Levi propre $R'\subset M'$ et des données auxiliaires pour $\mathbf{M}'$. Soit $\delta\in D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{R}'_1(F),\mathcal{O}_{\tilde{R}'})$. On veut prouver que son image $\delta^{\tilde{M}'}$ par induction appartient à $X_{++} + Ann^?$. Supposons d'abord R' relevant. Il lui est associé un élément $(\tilde{R}, \mathbf{R}') \in \mathcal{E}_+(\tilde{G}, \mathbf{a})$ et δ s'identifie à un élément de $D^{st}_{géom}(\mathbf{R}', \mathcal{O}_{\tilde{R}'})$. Fixons $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$ dont un Levi s'identifie à M'. En utilisant 5.8 (5) et (6) pour $(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ et pour $(\tilde{R}, \mathbf{R}')$, on voit que les deux éléments $\delta^{\tilde{M}'} - (\delta^{\tilde{M}'})^{\tilde{G}'}$ et $\delta - \delta^{\tilde{G}'}$ appartiennent à $Ann^?$. Par transitivité de l'induction, $(\delta^{\tilde{M}'})^{\tilde{G}'} = \delta^{\tilde{G}'}$. Donc $\delta - \delta^{\tilde{M}'} \in X_{++} + Ann^?$. Par hypothèse de récurrence, δ appartient à $X_{++} + Ann^?$. Donc aussi $\delta^{\tilde{M}'}$. Supposons maintenant R' non relevant. On a de nouveau $\delta^{\tilde{M}'} - \delta^{\tilde{G}'} \in X_{++} + Ann^?$. Mais $\delta^{\tilde{G}'}$ appartient à $Ann^?$ (5.8 (7)). Donc $\delta^{\tilde{M}'} \in X_{++} + Ann^?$. Cela achève la preuve. $\square$

5.10 Localisation

Fixons un élément semi-simple $\eta \in \tilde{G}(F)$ et un voisinage $\mathfrak{u}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$ ayant les mêmes propriétés qu'en 4.1. Avec les notations de ce paragraphe (et en rétablissant les espaces de mesures), on a défini une application

$$desc^{\tilde{G}}_\eta : I(\tilde{U}, \omega) \otimes Mes(G(F)) \to I(U_\eta, \omega) \otimes Mes(G_\eta(F)).$$

Il s'en déduit une application duale entre espaces de distributions. Pour s'affranchir de l'ensemble $\mathfrak{u}$ qui complique les notations, nous noterons

$$desc^{\tilde{G},*}_\eta : D_{géom}(G_\eta(F), \omega) \otimes Mes(G_\eta(F))^* \to D_{géom}(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))^*$$

cette application duale, étant entendue qu'elle n'est définie que pour des distributions dont le support dans $G_\eta(F)$ est assez voisin de 1. Notons $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison de η dans $\tilde{G}(F)$. On a défini l'espace $D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$. En appliquant la même définition en remplaçant $\tilde{G}$ par G_η et $\mathcal{O}$ par la classe de conjugaison réduite à $\{1\}$, on obtient un espace que l'on note plutôt $D_{unip}(G_\eta(F), \omega)$. L'application ci-dessus se restreint en une application surjective

$$desc^{\tilde{G},*}_\eta : D_{unip}(G_\eta(F), \omega) \otimes Mes(G_\eta(F))^* \to D_{géom}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(G(F))^*.$$

Plus précisement, cette application se factorise en

$$D_{unip}(G_\eta(F), \omega) \otimes Mes(G_\eta(F))^* \stackrel{p_\eta}{\to} D_{unip}(G_\eta(F), \omega)^{Z_G(\eta;F)} \otimes Mes(G_\eta(F))^*$$

$$\stackrel{desc^{\tilde{G},*}_\eta}{\simeq} D_{géom}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(G(F))^*,$$

où p_η est la projection naturelle sur l'espace des invariants (rappelons que l'action naturelle de $Z_G(\eta; F)$ tient compte du caractère ω).

Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On considère un élément semi-simple $\eta \in \tilde{G}(F)$ tel que G_η soit quasi-déployé. On note $\mathcal{O}$ sa classe de conjugaison stable et on pose $\Xi_\eta = Z_G(\eta)/G_\eta$. On a de même une application linéaire

$$desc^{st,\tilde{G},*}_\eta : D^{st}_{géom}(G_\eta(F)) \otimes Mes(G_\eta(F))^* \to D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^*.$$

Elle se restreint en une application

$$D^{st}_{unip}(G_\eta(F)) \otimes Mes(G_\eta(F))^* \stackrel{p^{st}_\eta}{\to} D^{st}_{unip}(G_\eta(F))^{\Xi_\eta^{\Gamma_F}} \otimes Mes(G_\eta(F))^*$$

$$\stackrel{desc_\eta^{st,\tilde{G},*}}{\simeq} \quad D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}) \otimes Mes(G(F))^*.$$

Attention. L'application $desc_\eta^{st,\tilde{G},*}$ n'est pas la restriction de $desc_\eta^{\tilde{G},*}$ à l'espace des distributions stables. La preuve du lemme 4.8 fournit la relation entre ces deux applications. On a

$$desc_\eta^{st,\tilde{G},*} = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)} desc_{\eta[y]}^{\tilde{G},*} \circ transfert_y,$$

où $transfert_y : D^{st}_{g\acute{e}om}(G_\eta(F)) \to D_{g\acute{e}om}(G_{\eta[y]}(F))$ est le transfert déduit du torseur intérieur $ad_y : G_{\eta[y]} \to G_\eta$.

5.11 Induction et classes de conjugaison stable

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et η un élément semi-simple de $\tilde{M}(F)$. On a défini le groupe I_η et l'ensemble $\mathcal{Y}(\eta)$ en 4.6. En remplaçant $\tilde{G}$ par $\tilde{M}$, on définit de même un groupe et un ensemble que l'on note I_η^M et $\mathcal{Y}^M(\eta)$. Remarquons que

(1) $I_\eta^M = I_\eta \cap M$.

Preuve. On a l'égalité $Z(M)^\theta = Z(M)^{\theta,0}Z(G)^\theta$ et l'inclusion $Z(M)^{\theta,0} \subset M_\eta$. Donc $I_\eta^M = Z(M)^\theta M_\eta = Z(G)^\theta M_\eta \subset I_\eta \cap M$. L'inclusion opposée provient de l'égalité $G_\eta \cap M = M_\eta$. $\square$

Il résulte de (1) que $\mathcal{Y}^M(\eta) = \mathcal{Y}(\eta) \cap M$. On en déduit une application naturelle

$$(2) \qquad I_\eta^M \backslash \mathcal{Y}^M(\eta)/M(F) \to I_\eta \backslash \mathcal{Y}(\eta)/G(F).$$

On note $\underline{\mathcal{Y}}^M(\eta)$ et $\underline{\mathcal{Y}}(\eta)$ les ensembles de doubles classes ci-dessus.

Lemme. *L'application (2) est injective. Pour $y \in \mathcal{Y}(\eta)$, l'image de y dans $\underline{\mathcal{Y}}(\eta)$ appartient à l'image de cette application si et seulement si le Levi M_η de G_η se transfère par le torseur intérieur $ad_{y^{-1}}$ en un Levi de $G_{\eta[y]}$. Plus précisément, soit $y \in \mathcal{Y}(\eta)$ dont l'image dans $\underline{\mathcal{Y}}(\eta)$ n'appartient pas à l'image de (2). Soit T un sous-tore maximal de M_η défini sur F. Alors le tore T ne se transfère pas par le torseur intérieur $ad_{y^{-1}}$ en un sous-tore maximal de $G_{\eta[y]}$ défini sur F.*

Preuve. Soient $y, y' \in \mathcal{Y}^M(\eta)$ dont les images dans $\underline{\mathcal{Y}}(\eta)$ sont égales. On doit prouver que leurs images dans $\underline{\mathcal{Y}}^M(\eta)$ le sont aussi. L'élément $(y')^{-1}y$ appartient à $\mathcal{Y}^M(\eta[y'])$. Son image dans $\underline{\mathcal{Y}}(\eta[y'])$ est égale à celle de 1. On vérifie qu'il suffit de prouver que les images de $(y')^{-1}y$ et de 1 dans $\underline{\mathcal{Y}}^M(\eta[y'])$ sont égales. Quitte à remplacer η par $\eta[y']$, on est ramené au problème initial avec cette fois $y' = 1$. A y, on associe le cocycle $\sigma \mapsto y\sigma(y)^{-1}$ de Γ_F dans I_η^M. L'hypothèse signifie que ce cocycle, poussé en un cocycle à valeurs dans I_η est un cobord. La conclusion est que ce cocycle lui-même est un cobord. Il suffit de prouver que le noyau K de l'application

$$H^1(\Gamma_F; I_\eta^M) \to H^1(\Gamma_F; I_\eta)$$

est réduit à $\{1\}$. Remarquons que, dans le cas où F est archimédien, les ensembles ci-dessus ne sont pas des groupes. Le noyau est l'ensemble des éléments de $H^1(\Gamma_F; I_\eta^M)$ qui s'envoient sur l'élément trivial de $H^1(\Gamma_F; I_\eta)$. Le centre $Z(I_\eta)$ de I_η est égal à $Z(G)^\theta Z(G_\eta)$

et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\Gamma_F;Z(I_\eta)) & \to & H^1(\Gamma_F;I_\eta) & \to & H^1(\Gamma_F;G_{\eta,AD}) \\ \| & & \uparrow & & \uparrow \\ H^1(\Gamma_F;Z(I_\eta)) & \to & H^1(\Gamma_F;I_\eta^M) & \to & H^1(\Gamma_F;M_{\eta,ad}) \end{array}$$

Les suites horizontales sont exactes. Parce que $M_{\eta,ad}$ est un Levi de $G_{\eta,AD}$, la dernière flèche verticale est injective. Il en résulte que K est l'image dans $H^1(\Gamma_F;I_\eta^M)$ du noyau C de l'application $H^1(\Gamma_F;Z(I_\eta)) \to H^1(\Gamma_F;I_\eta)$. Un élément $c \in C$ est un cocycle de la forme $\sigma \mapsto c(\sigma) = x\sigma(x)^{-1}$, où x est un élément de I_η dont l'image x_{ad} dans $G_{\eta,AD}$ appartient à $G_{\eta,AD}(F)$. Notons $\pi_{ad} : G_\eta \to G_{\eta,AD}$ la projection naturelle. Puisque $M_{\eta,ad}$ est un Levi de $G_{\eta,AD}$, la projection naturelle $M_{\eta,ad}(F) \to G_{\eta,AD}(F)/\pi_{ad}(G_\eta(F))$ est surjective. Quitte à multiplier x à droite par un élément de $G_\eta(F)$, on peut donc supposer $x_{ad} \in M_{\eta,ad}(F)$. Alors $x \in I_\eta^M$ et l'image du cocycle c dans $H^1(\Gamma_F;I_\eta^M)$ est un bord. Cela démontre que l'image K de C dans $H^1(\Gamma_F;I_\eta^M)$ est réduite à $\{1\}$, d'où l'injectivité de l'application (2).

Pour $y \in \mathcal{Y}^M(\eta)$, l'image de M_η par $ad_{y^{-1}}$ est $M_{\eta[y]}$. C'est un Levi de $G_{\eta[y])}$ (c'est-à-dire qu'il est défini sur F) et M_η se transfère en un tel Levi. Il en résulte plus généralement que, pour $y \in \mathcal{Y}(\eta)$, si l'image de y dans $\underline{\mathcal{Y}}(\eta)$ appartient à l'image de l'application (2), le Levi M_η de G_η se transfère par le torseur intérieur $ad_{y^{-1}}$ en un Levi de $G_{\eta[y]}$. Soit maintenant $y \in \mathcal{Y}(\eta)$ et T un sous-tore maximal de M_η. Supposons que T se transfère par $ad_{y^{-1}}$ en un sous-tore maximal de $G_{\eta[y]}$ défini sur F. Cela signifie que, quitte à multiplier à gauche y par un élément de G_η, le tore $T_y = ad_{y^{-1}}(T)$ est défini sur F et la restriction $ad_{y^{-1}} : T \to T_y$ est équivariante pour les actions galoisiennes. Il en résulte que $ad_{y^{-1}}$ se restreint en un isomorphisme défini sur F de A_T sur A_{T_y}. Notons $\tilde{R}$ et $\tilde{R}_y$ les commutants de A_T et A_{T_y} dans $\tilde{G}$. Fixons un élément x_* en position générale dans $X_*(A_T)$. Il détermine un espace parabolique $\tilde{S} \in \mathcal{P}(\tilde{R})$: A_T agit dans $\mathfrak{u}_S$ par des caractères α tels que $< \alpha, x_* >> 0$. A $ad_{y^{-1}}(x_*)$ est de même associé un espace parabolique $\tilde{S}_y \in \mathcal{P}(\tilde{R}_y)$. Alors $ad_{y^{-1}}$ envoie la paire $(\tilde{S},\tilde{R})$ sur $(\tilde{S}_y,\tilde{R}_y)$. On sait que deux telles paires définies sur F qui sont conjuguées par un élément de $G(\bar{F})$ le sont aussi par un élément de $G(F)$. Quitte à multiplier y à droite par un élément de $G(F)$, on peut donc supposer que les deux paires paraboliques sont égales. Cela entraîne $y \in R$. Mais $A_{\tilde{M}} \subset A_{M_\eta} \subset A_T \subset A_{\tilde{R}}$, donc $R \subset M$ et $y \in \mathcal{Y}(\eta) \cap M = \mathcal{Y}^M(\eta)$. Cela démontre la dernière assertion de l'énoncé. Enfin, soit $y \in \mathcal{Y}(\eta)$, supposons que M_η se transfère par le torseur intérieur $ad_{y^{-1}}$ en un Levi M_y de $G_{\eta[y]}$. On choisit un tore maximal T de M_η, défini sur F et elliptique si F est non-archimédien, resp. fondamental si F est archimédien. Alors T se transfère en un tore maximal défini sur F de M_y, a fortiori de $G_{\eta[y]}$. D'après ce que l'on vient de démontrer, l'image de y dans $\underline{\mathcal{Y}}(\eta)$ appartient à l'image de l'application (2). Cela achève la preuve. $\square$

5.12 Un résultat de réduction

On conserve la même situation. On note $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}(F)$ et $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ sa classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$. Remarquons qu'en général, $\mathcal{O}$ est plus petit que l'intersection $\mathcal{O}^{\tilde{G}} \cap \tilde{M}(F)$. Notons N le groupe des $x \in G(F)$ tels que ad_x conserve $\tilde{M}$ et $\mathcal{O}$. Ce groupe agit naturellement sur $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ via son quotient fini $N/M(F)$. On note p_N la projection naturelle sur le sous-espace des invariants par

N. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, N agit aussi sur $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$. On note p^{st}_N la projection sur le sous-espace des invariants

Lemme. *On suppose $G_\eta = M_\eta$ et $A_{\tilde{M}} = A_{M_\eta}$.*

(i) L'application (2) de 5.11 est bijective.

(ii) La restriction à $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ de l'application d'induction de $\tilde{M}$ à $\tilde{G}$ se factorise en

$$D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^* \stackrel{p_N}{\to} D_{géom}(\mathcal{O},\omega)^N\otimes Mes(M(F))^* \simeq D_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)\otimes Mes(G(F))^*.$$

(iii) Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. La restriction à $D^{st}_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ de l'application d'induction de $\tilde{M}$ à $\tilde{G}$ se factorise en

$$D^{st}_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^* \stackrel{p^{st}_N}{\to} D^{st}_{géom}(\mathcal{O},\omega)^N\otimes Mes(M(F))^* \simeq D^{st}_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)\otimes Mes(G(F))^*.$$

Preuve. L'hypothèse $G_\eta = M_\eta$ entraîne $I_\eta = I^M_\eta$. Un élément $y\in\mathcal{Y}(\eta)$ définit un cocycle $\sigma\mapsto y\sigma(y)^{-1}$ à valeurs dans I^M_η dont l'image dans $H^1(\Gamma_F;G)$ est triviale. Mais l'application $H^1(\Gamma_F;M)\to H^1(\Gamma_F;G)$ est injective. Donc l'image du cocycle ci-dessus dans $H^1(\Gamma_F;M)$ est triviale. Cela signifie que l'on peut écrire $y=y'g$, avec $g\in G(F)$ et $y'\in M$. Nécessairement, $y'\in\mathcal{Y}^M(\eta)$, donc l'image dans $\underline{\mathcal{Y}}(\eta)$ de y appartient à l'image de l'application (2) de 5.11. D'où la surjectivité de cette application et sa bijectivité d'après le lemme précédent.

Introduisons le groupe $Z_\eta = Z_G(\eta)\cap\mathcal{Y}(\eta)$ et son quotient $\underline{Z}_\eta = Z_\eta/I_\eta$. Le groupe Z_η agit sur $\mathcal{Y}(\eta)$ par multiplication à gauche. On vérifie que l'ensemble de doubles classes

$$\underline{\mathcal{X}}(\eta) = Z_\eta\backslash\mathcal{Y}(\eta)/G(F)$$

paramètre les classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$. En remplaçant $\tilde{G}$ par $\tilde{M}$, on a de même un ensemble

$$\underline{\mathcal{X}}^M(\eta) = Z^M_\eta\backslash\mathcal{Y}^M(\eta)/M(F)$$

qui paramètre les classes de conjugaison par $M(F)$ dans $\mathcal{O}$. L'assertion (i) déjà prouvée entraîne que l'application naturelle

$$\underline{\mathcal{X}}^M(\eta)\to\underline{\mathcal{X}}(\eta)$$

est surjective. On peut donc fixer un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}(\eta)$ de $\underline{\mathcal{X}}(\eta)$ qui est inclus dans $\mathcal{Y}^M(\eta)$. Fixons aussi un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)$ de $\underline{\mathcal{X}}(\eta)$. L'application précédente devient une application surjective

$$q:\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)\to\dot{\mathcal{X}}(\eta).$$

Pour tout $y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)$, on fixe $z_y\in Z_\eta$ et $g_y\in G(F)$ tels que $y=z_yq(y)g_y$. Remarquons que, pour un élément y de l'un ou l'autre de ces ensembles, les égalités $G_\eta = M_\eta$ et $A_{\tilde{M}} = A_{M_\eta}$ et le fait que $y\in M$ entraînent que $G_{\eta[y]} = M_{\eta[y]}$ et $A_{\tilde{M}} = A_{M_{\eta[y]}}$. On pose $D[y] = D_{unip}(M_{\eta[y]},\omega)$ et on note $\zeta_y : D[y]\to D[y]^{Z_G(\eta[y];F)}$ la projection naturelle. En oubliant pour simplifier les espaces de mesures, la description de 5.10 fournit des isomorphismes

$$D_{géom}(\mathcal{O},\omega) = \oplus_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)}D[y]^{Z_M(\eta[y];F)},$$

$$D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)=\oplus_{y\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)}D[y]^{Z_G(\eta[y];F)}.$$

Modulo ces isomorphismes, l'application d'induction se décrit de la façon suivante. A $(d_y)_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)}\in\oplus_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)}D[y]^{Z_M(\eta[y];F)}$, elle associe $(d'_{y'})_{y'\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)}\in\oplus_{y'\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)}D[y]^{Z_G(\eta[y];F)}$, où

$$d'_{y'}=\zeta_{y'}(\sum_{y\in q^{-1}(y')}\omega(g_y)^{-1}ad_{g_y}(d_y)).$$

On voit que cette application est surjective. D'autre part, l'application d'induction est insensible à l'action par conjugaison (tordue par le caractère ω) de tout élément de $G(F)$ conservant $\tilde{M}$. Elle se factorise donc par la projection p_N. Pour obtenir (ii), il reste à prouver que l'application d'induction

$$D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)^N\to D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)$$

est injective. A l'aide de la description ci-dessus, cela résulte de la propriété suivante. Soit $(d_y)_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)}\in\oplus_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)}D[y]^{Z_M(\eta[y];F)}$. Supposons cet élément invariant par N. Soit $y'\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)$. Alors

(1) l'élément $\omega(g_y)^{-1}ad_{g_y}(d_y)$ est indépendant de $y\in q^{-1}(y')$ et il est invariant par $Z_G(\eta[y'];F)$.

On ne perd rien à supposer que $y'=1$ et que $y=1$ appartient à $q^{-1}(1)$. Soit $y\in q^{-1}(1)$. Alors $ad_{g_y}(\eta[y])=\eta$, donc aussi $ad_{g_y}(G_{\eta[y]})=G_\eta$. Puisque $g\in G(F)$, ad_{g_y} envoie $A_{G_{\eta[y]}}$ sur A_{G_η}. Mais ces deux tores sont égaux à $A_{\tilde{M}}$. Donc ad_{g_y} conserve $A_{\tilde{M}}$ et aussi son commutant $\tilde{M}$. Puisque ad_{g_y} envoie $\eta[y]$ sur η, il conserve la classe de conjugaison stable commune $\mathcal{O}$ de ces deux éléments. Donc $g_y\in N$. L'hypothèse d'invariance par N entraîne l'égalité $\omega(g_y)^{-1}ad_{g_y}(d_y)=d_1$, d'où la première assertion de (1). Le même argument que ci-dessus montre que $Z_G(\eta;F)\subset N$. L'hypothèse d'invariance par N entraîne que d_1 est invariant par $Z_G(\eta;F)$. Cela démontre (1) et le (ii) de la proposition.

Pour le (iii), quitte à changer l'élément η de $\mathcal{O}$, on peut supposer G_η quasi-déployé. La description de 5.10 identifie $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}^{\tilde{G}})$ à $D^{st}_{unip}(M_\eta(F))^{\Xi_\eta^{\Gamma_F}}$ et $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})$ à $D^{st}_{unip}(M_\eta(F))^{\Xi_\eta^{M,\Gamma_F}}$. L'application d'induction n'est autre que la projection sur l'espace d'invariants par $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$. Elle est surjective. De nouveau, cette application se factorise par p_N^{st} et il reste à prouver que cette application d'induction est injective sur $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)^N$. Mais on vient de prouver qu'elle était injective sur l'espace plus gros $D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)^N$. D'où l'assertion, ce qui achève la démonstration. $\square$

5.13 Induction et stabilité

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $(\mathcal{O}_j)_{j=1,...,k}$ une famille finie de classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{M}(F)$.Rappelons que l'on note $\boldsymbol{\gamma}\mapsto\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{G}}$ l'homomorphisme d'induction de $D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ dans $D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))^*$.

Lemme. *Soit $\boldsymbol{\gamma}\in\sum_{j=1,...,k}D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)\otimes Mes(M(F))^*$. Supposons que $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{G}}$ soit stable. Alors il existe $\boldsymbol{\delta}\in\sum_{j=1,...,k}D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)\otimes Mes(M(F))^*$ telle que $\boldsymbol{\delta}^{\tilde{G}}=\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{G}}$.*

Preuve. On fixe des mesures de Haar pour se débarrasser des espaces de mesures. Pour tout j, notons $\mathcal{O}_j^{\tilde{G}}$ la classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$ qui contient $\mathcal{O}_j$. On peut regrouper les classes $\mathcal{O}_j$ selon ces classes $\mathcal{O}_j^{\tilde{G}}$. C'est-à-dire que l'on peut fixer une famille $(\mathcal{O}'_l)_{l=1,...,m}$ de classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{G}(F)$, distinctes deux-à-deux, et une application surjective $q : \{1,...,k\} \to \{1,...,m\}$ de sorte que $\mathcal{O}_j^{\tilde{G}} = \mathcal{O}'_{q(j)}$ pour tout $j = 1,...,k$. On peut écrire $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{l=1,...,m} \boldsymbol{\gamma}_l$, avec $\boldsymbol{\gamma}_l \in \sum_{j\in q^{-1}(l)} D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)$. Alors $\sum_{l=1,...,m} \boldsymbol{\gamma}_l^{\tilde{G}}$ est stable. Mais les distributions $\boldsymbol{\gamma}_l^{\tilde{G}}$ sont supportées par des classes de conjugaison stable distinctes. Il résulte des constructions de 4.6 qu'alors, chaque $\boldsymbol{\gamma}_l^{\tilde{G}}$ est stable. Pour résoudre notre problème, il suffit de trouver pour chaque l une distribution $\boldsymbol{\delta}_l \in \sum_{j\in q^{-1}(l)} D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)$ telle que $\boldsymbol{\delta}_l^{\tilde{G}} = \boldsymbol{\gamma}^{\tilde{G}}$. Cela nous ramène au problème initial, avec l'hypothèse supplémentaire que chacune des classes $\mathcal{O}_j$ engendre la même classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$. Nous faisons désormais cette hypothèse et nous posons simplement $\mathcal{O}^{\tilde{G}} = \mathcal{O}_j^{\tilde{G}}$ pour tout $j = 1,...,k$.

On fixe $\eta \in \mathcal{O}^{\tilde{G}}$ tel que G_η soit quasi-déployé et on fixe une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_\eta$ de G_η définie sur F, de paire de Borel (B_η, T). Pour tout $j = 1,...,k$, on fixe $\eta_j \in \mathcal{O}_j$ tel que M_{η_j} (donc aussi G_{η_j}) soit quasi-déployé et on fixe une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_{\eta_j}$ de G_{η_j} définie sur F, de paire de Borel (B_{η_j}, T_j), de sorte que M_{η_j} soit standard. Puisque $\eta_j \in \mathcal{O}^{\tilde{G}}$, on peut fixer $y_j \in \mathcal{Y}(\eta)$ de sorte que $\eta_j = \eta[y_j]$. L'automorphisme ad_{y_j} se restreint en un torseur intérieur de G_{η_j} sur G_η. Quitte à multiplier y_j à gauche par un élément de $I_\eta = G_\eta$, on peut supposer que ce torseur envoie $\mathcal{E}_{\eta_j}$ sur $\mathcal{E}_\eta$. Un tel torseur intérieur est alors un isomorphisme défini sur F. Il se restreint en un isomorphisme défini sur F de T_j sur T. Puisque $A_M \subset A_{M_\eta} \subset T$, le tore $ad_{y_j}(A_M)$ est défini sur F et l'application $ad_{y_j} : A_M \to ad_{y_j}(A_M)$ est un isomorphisme défini sur F. Notons $\tilde{M}_j$ le commutant de $ad_{y_j}(A_M)$ dans $\tilde{G}$. C'est un espace de Levi de $\tilde{G}$, on a $\eta \in \tilde{M}(F)$ et le groupe $M_{j,\eta}$ est standard pour $\mathcal{E}_\eta$ puisque c'est l'image par ad_{y_j} de M_{η_j}. Le même raisonnement que dans la preuve du lemme 5.11 montre que y_j se décompose en g_jm_j, avec $m_j \in M$ et $g_j \in G(F)$. On voit que m_j^{-1} appartient à $\mathcal{Y}(\eta_j)$, donc $ad_{m_j}(\eta_j) \in \mathcal{O}_j$. Le groupe $G_{ad_{m_j}(\eta_j)}$ est égal à $ad_{g_j^{-1}}(G_\eta)$, donc est quasi-déployé. Quitte à remplacer η_j par $ad_{m_j}(\eta_j)$, on peut donc supposer $m_j = 1$ et $y_j = g_j \in G(F)$. L'élément g_j conjugue $\tilde{M}$ en $\tilde{M}_j$, η_j en η et la classe $\mathcal{O}_j$ en la classe de conjugaison stable $\mathcal{O}'_j$ de η dans $\tilde{M}_j(F)$. On peut écrire $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\gamma}_j$, où $\boldsymbol{\gamma}_j \in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)$. Pour tout j, notons $\boldsymbol{\gamma}'_j$ l'image de $\boldsymbol{\gamma}_j$ par ad_{g_j}. C'est un élément de $D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}'_j)$. Il est clair que $\boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}} = \boldsymbol{\gamma}_j'^{\tilde{G}}$. Donc $\sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\gamma}_j'^{\tilde{G}}$ est stable. Supposons trouvées des distributions stables $\boldsymbol{\delta}_j'^{\tilde{G}} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}'_j)$ de sorte que $\sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\gamma}_j'^{\tilde{G}} = \sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\delta}_j'^{\tilde{G}}$. Pour tout j, on note alors $\boldsymbol{\delta}_j$ l'image de $\boldsymbol{\delta}'_j$ par $ad_{g_j^{-1}}$. En inversant le calcul ci-dessus, on voit que la distribution $\boldsymbol{\delta} = \sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\delta}_j$ résout notre problème.

Oubliant notre problème initial pour simplifier les notations, on est ramené au problème suivant. On considère une famille $(\tilde{M}_j)_{j=1,...,k}$ d'espaces de Levi de $\tilde{G}$ tels que $\eta \in \tilde{M}_j(F)$. Pour tout j, on note $\mathcal{O}_j$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}_j(F)$ et on considère une distribution $\boldsymbol{\gamma}_j \in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)$. On suppose que $\sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}}$ est stable. On veut prouver qu'il existe pour tout j une distribution $\boldsymbol{\delta}_j \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)$ de sorte que $\sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}} = \sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\delta}_j^{\tilde{G}}$.

Fixons un voisinage $\mathfrak{u}$ de 0 dans $G_\eta(F)$ ayant les mêmes propriétés qu'en 4.8. On pose $U_\eta = exp(\mathfrak{u})$ et on note $\tilde{U}$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F)$ dont la partie semi-simple est stablement conjuguée à un élément de $U_\eta\eta$. Pour tout $j = 1,...,k$, on pose $U_{\eta,j} = U_\eta \cap M_{j,\eta}(F)$ et on note $\tilde{U}_j$ l'ensemble des éléments de $\tilde{M}_j(F)$ dont la partie semi-simple est stablement conjuguée (dans $\tilde{M}_j$) à un élément de $U_{\eta,j}\eta$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
I(\tilde{U}) \arrow[rrr, "res"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddd, "s"'] & & & \oplus_{j=1,\ldots,k} I(\tilde{U}_j) \arrow[dl, "\underline{\iota}"'] \arrow[ddd, "\underline{s}"] \\
& I(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O}^{\tilde{G}},loc} \arrow[r, "res_{loc}"] \arrow[d, "s_{loc}"'] & \oplus_{j=1,\ldots,k} I(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc} \arrow[d, "\underline{s}_{loc}"'] & \\
& SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O}^{\tilde{G}},loc} \arrow[r, "res^{st}_{loc}"] & \oplus_{j=1,\ldots,k} SI(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc} & \\
SI(\tilde{U}) \arrow[rrr, "res^{st}"] \arrow[ur, "\iota^{st}"] & & & \oplus_{j=1,\ldots,k} SI(\tilde{U}_j) \arrow[ul, "\underline{\iota}^{st}"']
\end{tikzcd}$$

Les flèches sont les applications naturelles. Décrivons l'espace $I(\tilde{U})$. Pour $y \in \mathcal{Y}(\eta)$, il correspond à $\mathfrak{u}$ un voisinage $\mathfrak{u}_y$ de 0 dans $G_{\eta[y]}$. Posons $U_y = exp(\mathfrak{u}_y)$. On pose $Z_\eta = Z_G(\eta) \cap \mathcal{Y}(\eta)$. Comme on l'a vu dans la preuve de 5.12, l'ensemble

$$\underline{\mathcal{X}}(\eta) = Z_\eta \backslash \mathcal{Y}(\eta)/G(F)$$

paramètre l'ensemble des classe de conjugaison par $G(F)$ dans $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$. Si on fixe un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}(\eta)$ de cet ensemble de doubles classes, la théorie de la descente identifie $I(\tilde{U})$ à $\oplus_{y\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)} I(U_y)^{Z_G(\eta[y];F)}$. Fixons plutôt un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ de l'ensemble de doubles classes

$$\underline{\mathcal{Y}}(\eta) = G_\eta \backslash \mathcal{Y}(\eta)/G(F).$$

Alors $I(\tilde{U})$ s'identifie au sous-espace des $(f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} \in \oplus_{y\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)} I(U_y)$ qui vérifient la condition suivante :

(1) soient $y, y' \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et $g \in G(F)$ tels que $ad_g(\eta[y]) = \eta[y']$; alors $f_{y'} = ad_g(f_y)$.

Remarquons que le quotient Z_η/G_η est égal au groupe $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$ de 4.8. Ce groupe agit sur $\underline{\mathcal{Y}}(\eta)$ par multiplication à gauche. Il s'en déduit une action de ce groupe sur $\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ que l'on note $(\xi, y) \mapsto \xi \star y$. Le stabilisateur dans $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$ d'un élément y est l'image dans ce groupe de $ad_y(Z_G(\eta[y]; F))$. Comme on l'a vu en 4.6, le groupe $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$ agit sur G_η par automorphismes définis sur F. Rappelons la construction. Considérons un élément $z \in Z_\eta$. Quitte à multiplier z à gauche par un élément de G_η, on peut supposer que ad_z conserve $\mathcal{E}_\eta$. L'élément z est alors bien déterminé modulo multiplication à gauche par un élément de $Z(G_\eta)$ et on a $z\sigma(z)^{-1} \in Z(G_\eta)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. La restriction de ad_z à G_η est un automorphisme de ce groupe qui est défini sur F. Cet automorphisme ne dépend que de l'image de z dans $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$. On note ad_ξ l'automorphisme déterminé par $\xi \in \Xi_\eta^{\Gamma_F}$. Posons $\dot{\mathcal{Y}}^0(\eta) = \dot{\mathcal{Y}}(\eta) \cap Z_\eta G(F)$. Les éléments de cet ensemble sont les $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ tels que $\eta[y]$ est conjugué à η par un élément de $G(F)$. On impose à notre système de représentants $\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ la condition

(2) supposons $y \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$; alors y est un élément de Z_η tel que ad_y conserve $\mathcal{E}_\eta$.

Il en résulte que, pour un tel élément y, on a $\eta[y] = \eta$ et, en notant ξ_y l'image de y dans $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$, la restriction de ad_y à G_η coïncide avec ad_{ξ_y}.

On décrit de façon similaire les espaces $I(\tilde{U}_j)$ et on impose la même condition. On ajoute des indices j pour les objets relatifs à ces espaces. D'après le lemme 5.11, il y a pour tout j une injection $q_j = \dot{\mathcal{Y}}_j(\eta) \to \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ de sorte que, pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)$, il existe $x_y \in G_\eta$ et $g_y \in G(F)$ tels que $y = x_y q_j(y) g_y$. On fixe de tels éléments x_y et g_y. Montrons que

(3) soit $y \in \dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)$, supposons $q_j(y) \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$; alors on peut supposer $x_y = 1$.

On a $x_y q_j(y)\sigma(q_j(y))^{-1}\sigma(x_y)^{-1} = y\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. D'après (2), le terme $q_j(y)\sigma(q_j(y))^{-1}$ appartient à $Z(G_\eta)$. Donc, d'une part, il commute à x_y, d'autre part, il appartient à $M_{j,\eta}$, a fortiori à M_j. L'égalité précédente entraîne que $x_y\sigma(x_y)^{-1} \in M_j$. Puisque c'est aussi un élément de G_η, il appartient à $M_{j,\eta}$. On obtient un cocycle $\sigma \mapsto x_y\sigma(x_y)$ à valeurs dans $M_{j,\eta}$ qui devient un cobord dans G_η. Puisque $H^1(\Gamma_F; M_{j,\eta}) \to H^1(\Gamma_F; G_\eta)$ est injective, il existe $x' \in M_{j,\eta}$ et $g' \in G_\eta(F)$ tel que $x_y = x'g'$. On a alors $y = x'g'q_j(y)g_y = x'q_j(y)ad_{q_j(y)^{-1}}(g')g_y$. Puisque $ad_{q_j(y)}$ est un automorphisme défini sur F de G_η, le terme $ad_{q_j(y)^{-1}}(g')g_y$ appartient à $G(F)$. On peut remplacer y par $(x')^{-1}y$, x_y par 1 et g_y par $ad_{q_j(y)^{-1}}(g')g_y$. Avec ces nouvelles définitions, on a $y = q_j(y)g_y$, ce qui démontre (3).

L'application res du diagramme se décrit par

$$(4) \qquad (f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} \in I(\tilde{U}) \mapsto (f_{j,y})_{j=1,\dots,k,y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)} \in \oplus_{j=1,\dots,k} I(\tilde{U}_j)$$

où, pour tout j et tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)$, $f_{j,y}$ est l'image de $ad_{g_y^{-1}}(f_{q_j(y)})$ par l'application $res_{M_{j,\eta[y]}}$. Rappelons que pour tout $y \in \mathcal{Y}(\eta)$, du torseur intérieur ad_y se déduit une application $transfert_y : I(\tilde{U}_y) \to SI(\tilde{U}_\eta)$. Soit $(f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} \in I(\tilde{U})$. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et tout $\xi \in \Xi_\eta^{\Gamma_F}$, on a l'égalité

$$(5) \qquad transfert_{\xi\star y}(f_{\xi\star y}) = ad_\xi(transfert_y(f_y)).$$

A ce point, nous allons séparer les cas F non-archimédien et F archimédien.

5.14 Suite de la preuve, cas F non-archimédien

On suppose F non-archimédien. On va prouver

(1) soit $f \in I(\tilde{U})$; supposons que l'image de f dans $\oplus_{j=1,\dots,k} SI(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$ est nulle ; alors il existe $f' \in I(\tilde{U})$ qui a même image que f dans $\oplus_{j=1,\dots,k} I(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$ et dont l'image dans $SI(\tilde{U})$ est nulle.

Soit $f = (f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} \in I(\tilde{U})$. On note $(f_{j,y})_{j=1,\dots,k,y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)}$ son image dans $\oplus_{j=1,\dots,k} I(\tilde{U}_j)$, cf. 5.13 (4). Supposons que l'image de f dans $\oplus_{j=1,\dots,k} SI(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$ est nulle. Posons $\phi = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)} transfert_y(f_y)$. C'est un élément de $SI(U_\eta)$. Montrons que

(2) pour tout $j = 1, \dots, k$, l'image $\phi_{M_{j,\eta}}$ de ϕ dans $SI(U_{\eta,j})$ est nulle au voisinage de 0.

Soit $j \in \{1, \dots, k\}$. Posons $\phi_j = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)} transfert_y(f_{j,y})$. C'est un élément de $SI(U_{\eta,j})$. D'après la description de 4.8, dire que l'image de f dans $SI(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$ est nulle revient à dire que ϕ_j est nulle au voisinage de 0. Il suffit donc de prouver que $\phi_j = \phi_{M_{j,\eta}}$. Par commutation du transfert à la restriction, on voit que, pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)$, on a $transfert_y(f_{j,y}) = (transfert_{q_j(y)}(f_{q_j(y)}))_{M_{j,\eta}}$. D'autre part, pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ qui n'appartient pas à l'image de q_j, aucun sous-tore maximal de $M_{j,\eta}$ ne se transfère à $G_{\eta[y]}$, cf. lemme 5.11. Il en résulte que $(transfert_y(f_y))_{M_{j,\eta}} = 0$. Cela démontre l'égalité $\phi_j = \phi_{M_{j,\eta}}$ et (2).

Quitte à multiplier f par la fonction caractéristique d'un voisinage ouvert et fermé de $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ invariant par conjugaison stable (c'est-à-dire tel qu'en 4.6) et assez petit, ce qui ne change pas l'image de f dans $\oplus_{j=1,\dots,k} I(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$, on peut donc supposer que $\phi_{M_{j,\eta}} = 0$. On dispose d'une action de $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$ sur $G_\eta(F)$, donc aussi sur $I(G_\eta(F))$ et

$SI(G_\eta(F))$. On a aussi une action de $G_{\eta,AD}(F)$. Les deux actions se combinent en une action du produit semi-direct $H_\eta = G_{\eta,AD}(F) \rtimes \Xi_\eta^{\Gamma_F}$. On sait que ϕ est invariant par $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$, cf. lemme 4.8. On retrouve d'ailleurs ce résultat en utilisant 5.13(5). D'autre part, les classes de conjugaison stable dans $G_\eta(F)$ d'éléments fortement réguliers sont invariantes par l'action de $G_{\eta,AD}(F)$. Il en résulte que U_η est invariant par $G_{\eta,AD}(F)$ et que l'action de ce groupe $G_{\eta,AD}(F)$ sur $SI(G_\eta(F))$ est triviale. Donc ϕ est invariant par H_η. Cela entraîne que $\phi_{ad_h(M_{j,\eta})} = 0$ pour tout j et tout $h \in H_\eta$. L'action de H_η sur $I(G_\eta(F))$ se factorise par l'action d'un groupe fini puisque l'image de $G_\eta(F)$ dans $G_{\eta,AD}(F)$ agit trivialement. Il en résulte que l'on peut relever ϕ en un élément $\varphi \in I(U_\eta)$ qui est invariant par H_η. Cet élément vérifie : l'image de $\varphi_{ad_h(M_{j,\eta})}$ dans $SI(ad_h(M_{j,\eta}(F)))$ est nulle pour tout $j = 1, ..., k$ et tout $h \in H_\eta$. Pour la même raison que ci-dessus, l'ensemble des Levi intervenant dans cette relation est fini modulo conjugaison par $G_\eta(F)$. On peut donc appliquer le 4.16 : il existe $\varphi_0 \in I^{inst}(G_\eta(F))$ tel que $\varphi_{0,ad_h(M_{j,\eta})} = \varphi_{ad_h(M_{j,\eta})}$ pour tous j, h. On peut moyenner φ_0 sous l'action de H_η et supposer φ_0 invariant par ce groupe. On peut aussi remplacer φ_0 par son produit avec la fonction caractéristique de U_η et supposer $\varphi_0 \in I(U_\eta)$.

Notons N le nombre d'éléments de $\dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$. Définissons une famille $f' = (f'_y)_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)} \in \oplus_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)} I(U_y)$ par $f'_y = f_y$ pour $y \notin \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$ et $f'_y = f_y + \frac{1}{N}(\varphi_0 - \varphi)$ pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$. Remarquons qu'en vertu de l'hypothèse 5.13(2), on a $\eta[y] = \eta$ et $U_y = U_\eta$ pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$. Nos fonctions appartiennent bien à l'espace indiqué. Montrons que

(3) la famille f' appartient à $I(\tilde{U})$.

On doit vérifier la condition 5.13(1). Soient $y, y' \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et $g \in G(F)$ tels que $ad_g(\eta[y]) = \eta[y']$. Ces conditions entraînent que $y \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$ si et seulement si $y' \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$. Supposons d'abord que $y, y' \notin \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$. Alors la condition $ad_g(f'_y) = f'_{y'}$ résulte de la condition initiale $ad_g(f_y) = f_{y'}$. Supposons maintenant $y, y' \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$. Dans ce cas $\eta[y] = \eta[y']$, donc $g \in Z_G(\eta; F)$. En vertu de la condition initiale $ad_g(f_y) = f_{y'}$, il nous suffit de prouver que φ et φ_0 sont invariantes par ad_g. Puisque ces fonctions sont invariantes par H_η, il suffit de prouver qu'il existe $h \in H_\eta$ tel que $ad_g = ad_h$. Or $Z_G(\eta; F) \subset Z_\eta$. On peut donc trouver $x \in G_\eta$ et $z \in Z_\eta$ de sorte que $g = xz$ et ad_z conserve $\mathcal{E}_\eta$. On a $ad_g = ad_x ad_z$. On a $ad_z = ad_\xi$, où ξ est l'image de z dans $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$. Puisque ad_g et ad_ξ sont définis sur F, ad_x aussi, ce qui implique que l'image de x dans $G_{\eta,AD}$ appartient à $G_{\eta,AD}(F)$. On a bien décomposé ad_g en produit de l'action d'un élément de $G_{\eta,AD}(F)$ et d'un élément de $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$. Cela prouve (3).

On a

(4) l'image de f' dans $SI(\tilde{U})$ est nulle.

Posons $\phi' = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)} transfert_y(f'_y)$. C'est un élément de $SI(U_\eta)$. En vertu de 4.8, il s'agit de prouver que $\phi' = 0$. Par définition,

$$\phi' = \phi + \frac{1}{N} \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)} transfert_y(\varphi_0 - \varphi).$$

Rappelons que l'image de φ dans $SI(U_\eta)$ est ϕ. Pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$, l'image de $transfert_y(\varphi)$ est $\xi_y(\phi)$, qui est égale à ϕ puisque ϕ est invariant par $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$. L'image de φ_0 dans $SI(U_\eta)$ est nulle, et celle de $transfert_y(\varphi_0)$ est l'image de la précédente par ξ_y, donc est nulle. L'égalité ci-dessus entraîne $\phi' = 0$, d'où (4).

Montrons que

(5) pour tout $j = 1, ..., k$, f et f' ont même image dans $I(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$.

Par 5.13(4), la famille f' définit une famille $(f'_{j,y})_{j=1,...,k,y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)}$. On doit prouver que $f_{j,y}=f'_{j,y}$ pour tous j, y. Fixons j et y. Alors $f_{j,y}$ et $f'_{j,y}$ sont les images de $ad_{g_y^{-1}}(f_{q_j(y)})$ et $ad_{g_y^{-1}}(f'_{q_j(y)})$ par $res_{M_{j,\eta[y]}}$. Si $q_j(y)\not\in\dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$, on a $f_{q_j(y)}=f'_{q_j(y)}$, d'où l'égalité cherchée. Supposons $q_j(y)\in\dot{\mathcal{Y}}^0(\eta)$. En vertu de la définition de $f'_{q_j(y)}$, il suffit de prouver que les images de $ad_{g_y^{-1}}(\varphi)$ et de $ad_{g_y^{-1}}(\varphi_0)$ par $res_{M_{j,\eta[y]}}$ sont égales. Cela équivaut à $\varphi_{ad_{g_y}(M_{j,\eta[y]})}=\varphi_{0,ad_{g_y}(M_{j,\eta[y]})}$. Posons $z=q_j(y)$. D'après 5.13(3), on a $y=zg_y$. Donc $ad_{g_y}(M_{j,\eta[y]})=ad_{z^{-1}}ad_y(M_{j,\eta[y]})=ad_{z^{-1}}(M_{j,\eta})$, puisque $y\in M_j$. D'où $ad_{g_y}(M_{j,\eta[y]})=ad_\xi(M_{j,\eta})$, où ξ est l'image de z^{-1} dans $\Xi_\eta^{\Gamma_F}$. La définition de φ_0 entraîne que $\varphi_{ad_\xi(M_{j,\eta})}=\varphi_{0,ad_\xi(M_{j,\eta})}$, ce qui prouve (5).

D'après (3), (4) et (5), on a prouvé (1). Prouvons maintenant le lemme 5.13. Pour tout $j=1,...,k$, soit $\boldsymbol{\gamma}_j\in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)$. On suppose que $\sum_{j=1,...,k}\boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}}$ est stable. On s'est ramené à trouver pour tout j une distribution $\boldsymbol{\delta}_j\in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_j)$ de sorte que $\sum_{j=1,...,k}\boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}}=\sum_{j=1,...,k}\boldsymbol{\delta}_j^{\tilde{G}}$. L'élément $\oplus_{j=1,...,k}\boldsymbol{\gamma}_j$ est une forme linéaire sur $\oplus_{j=1,...,k}I(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$. L'élément $\oplus_{j=1,...,k}\boldsymbol{\delta}_j$ cherché est une forme linéaire sur $\oplus_{j=1,...,k}SI(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$. On peut la considérer comme une forme linéaire sur $\oplus_{j=1,...,k}I(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$ nulle sur le noyau de $\underline{s}_{loc}$, avec la notation du diagramme de 5.13. La condition d'égalité des induites revient à ce que ces deux formes linéaires coïncident sur l'image Im de l'application res_{loc}. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution est que $\oplus_{j=1,...,k}\boldsymbol{\gamma}_j$ annule $Im\cap Ker(\underline{s}_{loc})$. Un élément de $Im\cap Ker(\underline{s}_{loc})$ est l'image d'un $f\in I(\tilde{U})$ tel que l'image de f dans $\oplus_{j=1,...,k}SI(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$ est nulle. D'après (1), on peut supposer que l'image de f dans $SI(\tilde{U})$ est nulle. Par ailleurs, la valeur de $\oplus_{j=1,...,k}\boldsymbol{\gamma}_j$ sur l'image de f est égale à celle de $\oplus_{j=1,...,k}\boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}}$ sur f. Celle-ci est nulle puisque cette distribution est stable. Cela achève la démonstration.

5.15 Suite de la preuve, cas F archimédien

Le problème pour $F=\mathbb{C}$ se ramène au même problème pour $F=\mathbb{R}$ en remplaçant chaque groupe et chaque espace par l'objet sur $\mathbb{R}$ obtenu par restriction des scalaires. On suppose donc $F=\mathbb{R}$. Tous les ensembles du diagramme de 5.13 sont des espaces de Fréchet et toutes les applications sont continues. Les applications s, ι, ι^{st} et s_{loc} sont surjectives. Il en est de même de $\underline{s}$, $\underline{\iota}$, $\underline{\iota}^{st}$ et $\underline{s}_{loc}$. Montrons que

(1) les images de res et res^{st} sont fermées.

On a décrit $\oplus_{j=1,...,k}I(\tilde{U}_j)$ comme un espace de familles $(f_{j,y})_{j=1,...,k,y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)}$ où $f_{j,y}\in I(U_{j,y})$ pour tous j,y. On va montrer que l'image de res s'identifie au sous-espace des familles $(f_{j,y})_{j=1,...,k,y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)}$ qui vérifient la condition suivante :

(2) soient $j,j'\in\{1,...,k\}$, $y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)$, $y'\in\dot{\mathcal{Y}}_{j'}(\eta)$, R_y un Levi de $M_{j,\eta[y]}$, $R'_{y'}$ un Levi de $M_{j',\eta[y']}$ et $g\in G(\mathbb{R})$ tel que $ad_g(\eta[y])=\eta[y']$ et $ad_g(R_y)=R'_{y'}$; alors $f_{j',y',R'_{y'}}=ad_g(f_{j,y,R_y})$.

La condition est nécessaire. En effet, soit $x\in R_y(\mathbb{R})$ en position générale. Si notre collection $(f_{j,y})_{j=1,...,k,y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)}$ provient de $f\in I(\tilde{U})$, on a

$$I^{R'_{y'}}(ad_g(x),f_{j',y',R'_{y'}})=I^{M_{j',\eta[y']}}(ad_g(x),f_{j',y'})=I^{\tilde{M}'_j}(exp(ad_g(x))\eta[y'],f_{\tilde{M}_{j'}})$$

$$=I^{\tilde{G}}(exp(ad_g(x))\eta[y'],f)=I^{\tilde{G}}(ad_g(exp(x)\eta[y]),f)=I^{\tilde{G}}(exp(x)\eta[y],f)$$

$$=I^{\tilde{M}_j}(exp(x)\eta[y],f_{\tilde{M}_j})=I^{M_{j,\eta[y]}}(x,f_{j,y})=I^{R_y}(x,f_{j,y,R_y}).$$

Inversement, supposons (2) vérifiée. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$, considérons l'ensemble des triplets (j, y', g) tels que $j \in \{1, ..., k\}$, $y' \in \dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)$, $g \in G(\mathbb{R})$ tels que $ad_g(\eta[y]) = \eta[y']$. Le groupe $G_{\eta[y]}(\mathbb{R})$ agit sur cet ensemble par multiplication de g à droite. L'ensemble des orbites est fini. Fixons un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{G}}_y$ de cet ensemble d'orbites. A tout élément $\underline{g} = (j, y', g) \in \dot{\mathcal{G}}_y$ sont associés un Levi $L_{\underline{g}} = ad_{g^{-1}}(M_{j,\eta[y']})$ de $G_{\eta[y]}$ et une fonction $f_{\underline{g}} = ad_{g^{-1}}(f_{j,y'}) \in I(L_{\underline{g}}(\mathbb{R}))$. La condition (2) assure que ces familles de Levi et de fonctions vérifient la condition du lemme 4.3. On peut donc fixer une fonction $\phi_y \in I(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))$ de sorte que $(\phi_y)_{L_{\underline{g}}} = f_{\underline{g}}$ pour tout $\underline{g} \in \dot{\mathcal{G}}_y$. Puisque chaque $f_{j,y'}$ est à support dans $U_{j,y'}$, il est plus ou moins clair que l'on peut fixer une fonction α sur $G_{\eta[y]}(\mathbb{R})$, qui est C^∞ et invariante par conjugaison, dont le support est contenu dans U_y, de sorte que $f_{\underline{g}} = \alpha f_{\underline{g}}$ pour tout $\underline{g} \in \dot{\mathcal{G}}_y$. On peut aussi bien remplacer ϕ_y par $\alpha\phi_y$ et supposer $\phi_y \in I(U_y)$. Considérons l'ensemble des couples (y', g) tels que $y' \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et $g \in G(\mathbb{R})$ tels que $ad_g(\eta[y]) = \eta[y']$. De nouveau, le groupe $G_{\eta[y]}(\mathbb{R})$ agit sur cet ensemble par multiplication de g à droite. On fixe un ensemble $\dot{\mathcal{H}}_y$ de représentants de l'ensemble d'orbites. Il résulte de (2) que, pour tout $(y', g) \in \dot{\mathcal{H}}_y$, la fonction $ad_{g^{-1}}(\phi_{y'})$ vérifie la même condition que ϕ_y. On pose

$$f_y = |\dot{\mathcal{H}}_y|^{-1} \sum_{(y',g)\in\dot{\mathcal{H}}_y} ad_{g^{-1}}(\phi_{y'}).$$

On voit que la famille $(f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)}$ vérifie la condition (1) de 5.13. Elle s'identifie donc à un élément de $I(\tilde{U})$. On voit que son image par res est la famille $(f_{j,y})_{j=1,...,k, y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)}$ de départ. Cela prouve (2).

Cette relation (2) décrit l'image de res par des conditions qui sont fermées. Il en résulte que cette image est fermée. Une preuve similaire s'applique à l'application res^{st}. D'où (1).

Montrons que (1) vaut aussi pour les applications localisées, c'est-à-dire

(3) les images de res_{loc} et res^{st}_{loc} sont fermées.

L'espace $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))_{\mathcal{O}^{\tilde{G}},loc}$ s'identifie à celui des familles $(f_y)_{y\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)}$ telles que

- on a $f_y \in I(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$, où l'indice $unip$ signifie le localisé relatif à la classe de conjugaison $\{1\}$ de $G_{\eta[y]}(\mathbb{R})$;

- soient $y, y' \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ et $g \in G(\mathbb{R})$ tels que $ad_g(\eta[y]) = \eta[y']$; alors $f_{y'} = ad_g(f_y)$.

On décrit de façon analogue l'espace $\oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(\mathbb{R}))_{\mathcal{O}_j,loc}$. Il est facile de reprendre la preuve de (1) et de montrer que l'image de res_{loc} est formé des familles $(f_{j,y})_{j=1,...,k,y\in\dot{\mathcal{Y}}_j(\eta)} \in \oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(\mathbb{R}))_{\mathcal{O}_j,loc}$ qui vérifient la condition (2) ci-dessus. On laisse cette preuve au lecteur. De nouveau, ces conditions sont fermées, ce qui prouve que l'image de res_{loc} est fermée. Une preuve similaire s'applique à res^{st}_{loc}. D'où (3).

De la commutativité du diagramme de 5.13 résulte que l'image de $Ker(s)$ par $res_{loc} \circ \iota$ est incluse dans $Im(res_{loc}) \cap Ker(\underline{s}_{loc})$. On va prouver

(4) l'image de $Ker(s)$ par $res_{loc} \circ \iota$ est dense dans $Im(res_{loc}) \cap Ker(\underline{s}_{loc})$.

On a $Im(res_{loc}) = Im(res_{loc} \circ \iota)$. Soit $f \in I(\tilde{U})$, supposons $res_{loc} \circ \iota(f) \in Ker(\underline{s}_{loc})$. Soit V_1 un voisinage de 0 dans $\oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$. Puisque $res_{loc} \circ \iota$ est continue, on peut fixer un voisinage V_2 de 0 dans $I(\tilde{U})$ tel que $res_{loc} \circ \iota(V_2) \subset V_1$. L'application $\underline{s} \circ res = res^{st} \circ s$ est d'image fermée d'après (1). Puisqu'il s'agit d'une application continue entre espaces de Fréchet, elle est ouverte sur son image. Il existe donc un voisinage V_3 de 0 dans $\oplus_{j=1,...,k} SI(\tilde{U}_j)$ tel que $V_3 \cap Im(\underline{s} \circ res) \subset \underline{s} \circ res(V_2)$. Fixons un tore maximal T de G_η et munissons $\mathfrak{t}(\mathbb{C})$ d'une forme hermitienne définie positive invariante par le groupe de Weyl absolu de T dans G. Si l'on suppose $\mathfrak{u}$ assez petit, tout élément $\gamma \in \tilde{U}$ est conjugué par un élément de $G(\mathbb{C})$ à un élément $exp(X)\eta$ avec $X \in \mathfrak{t}(\mathbb{C})$ proche de 0. La norme $|X|$ est bien déterminée. Soit b une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 dans un voisinage de 0 et est nulle sur $[1, +\infty[$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit une fonction B_n sur $\tilde{U}$ par $B_n(\gamma) = b(n|X|^2)$ avec la notation précédente. Elle vaut 1 dans un voisinage de $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ et sa restriction aux éléments fortement réguliers est invariante par conjugaison stable. On a

(5) $lim_{n\to\infty}\underline{s} \circ res(fB_n) = 0$.

En effet, fixons $j = 1, ..., k$ et un sous-tore maximal de $M_{j,\eta}$ défini sur F. Pour simplifier la notation, on peut aussi bien supposer que c'est le tore T précédent. Définissons des fonctions ψ et ψ_n sur $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ par $\psi(X) = S^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, f)$ et $\psi_n(X) = S^{\tilde{G}}(exp(X)\eta, fB_n)$. Soit D un opérateur différentiel sur $\mathfrak{t}$ à coefficients constants. On doit prouver que

$$lim_{n\to\infty} sup_{X\in\mathfrak{t}(\mathbb{R})}|D\psi_n(X)| = 0.$$

On a $\psi_n(X) = \psi(X)b(n|X|^2)$. On voit que $D\psi_n(X)$ est combinaison linéaire de termes $n^k D_1\psi(X)(D_2b)(n|X|^2)P(X)$, avec des opérateurs différentiels D_1 et D_2 à coefficients constants et un polynôme P, les coefficients de cette combinaison linéaire ne dépendant pas de n (les termes n^k et $P(X)$ proviennent par dérivation de $n|X|^2$). L'hypothèse sur f est que $\underline{\iota}^{st} \circ \underline{s} \circ res(f) = 0$. Cela implique que toutes les dérivées de ψ sont nulles en 0. Le développement d'Euler-Mac-Laurin entraîne que l'on a pour tout $m \in \mathbb{N}$ une majoration $|D_1\psi(X)| \leq C_m|X|^m$. Le terme ci-dessus est donc majoré par

$$C_{2k+2}n^k|X|^{2k+2}|P(X)(D_2b)(n|X|^2)|.$$

Le terme $(D_2b)(n|X|^2)$ est majoré uniformément et sa non-nullité implique $|X|^2 \leq n^{-1}$. A fortiori, $|X|^2 \leq 1$ et $|P(X)|$ est uniformément majoré dans ce domaine. Le terme $n^k D_1\psi(X)(D_2b)(n|X|^2)P(X)$ est donc majoré par Cn^{-1} pour une constante C convenable. Cela prouve (5).

Pour n assez grand, on a donc $\underline{s} \circ res(fB_n) \in V_3$. On peut alors choisir une fonction $f_n \in V_2$ de sorte que $\underline{s} \circ res(fB_n - f_n) = 0$. On peut alors reprendre la démonstration du cas non-archimédien en l'appliquant à $fB_n - f_n$. On a l'analogue de 5.14(1), à savoir qu'il existe $f' \in I(\tilde{U})$ qui a même image que $fB_n - f_n$ dans $\oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(\mathbb{R}))_{\mathcal{O}_j,loc}$ et dont l'image dans $SI(\tilde{U})$ est nulle. Cette dernière condition signifie que f' appartient à $Ker(s)$. La première condition signifie que $res_{loc} \circ \iota(f') = res_{loc} \circ \iota(fB_n - f_n)$. Puisque B_n vaut 1 dans un voisinage de $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$, on a $res_{loc} \circ \iota(fB_n) = res_{loc} \circ \iota(f)$. On a aussi $res_{loc} \circ \iota(f_n) \in V_1$. Cela prouve qu'il existe un élément $f' \in Ker(s)$ tel que $res_{loc} \circ \iota(f - f') \in V_1$. D'où la densité affirmée par (4).

Prouvons maintenant le lemme 5.13. Pour tout $j = 1, ..., k$, soit $\boldsymbol{\gamma}_j \in D_{géom}(\mathcal{O}_j)$. On suppose que $\sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}}$ est stable. On s'est ramené à trouver pour tout j une distribution $\boldsymbol{\delta}_j \in D^{st}_{géom}(\mathcal{O}_j)$ de sorte que $\sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}} = \sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\delta}_j^{\tilde{G}}$. Posons pour simplifier $\boldsymbol{\gamma} = \oplus_{j=1,...,k}\boldsymbol{\gamma}_j$. C'est une forme linéaire continue sur $\oplus_{j=1,...,k} I(\tilde{M}_j(F))_{\mathcal{O}_j,loc}$. Comme dans le cas non-archimédien, la stabilité de $\sum_{j=1,...,k} \boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}}$ implique que $\boldsymbol{\gamma}$ est nulle sur l'image de $Ker(s)$ par $res_{loc} \circ \iota$. D'après (4) et puisque cette forme linéaire est continue, elle est nulle sur $Im(res_{loc}) \cap Ker(\underline{s}_{loc})$. Les espaces intervenant ici sont fermés d'après (3). Donc $\boldsymbol{\gamma}$ se descend en une forme linéaire continue sur $Im(res_{loc})/(Im(res_{loc}) \cap Ker(\underline{s}_{loc}))$. L'application $\underline{s}_{loc}$ se quotiente en une bijection continue de cet espace sur $Im(res^{st}_{loc})$. D'après (3) et parce que nos espaces sont de Fréchet, cette bijection est un homéomorphisme.

On obtient qu'il existe une forme linéaire continue $\boldsymbol{\delta}'$ sur $Im(res_{loc}^{st})$ telle que $\boldsymbol{\delta}' \circ \underline{s}_{loc}$ coïncide avec $\boldsymbol{\gamma}$ sur $Im(res_{loc})$. Toujours d'après (3), on peut prolonger $\boldsymbol{\delta}'$ en une forme linéaire continue $\boldsymbol{\delta} = \oplus_{j=1,...,k}\boldsymbol{\delta}_j \in \oplus_{j=1,...,k}D_{géom}^{st}(\mathcal{O}_j)$. La condition précédente signifie que $\sum_{j=1,...,k}\boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{G}} = \sum_{j=1,...,k}\boldsymbol{\delta}_j^{\tilde{G}}$. Cela achève la démonstration. $\square$

6 Le cas non ramifié

6.1 La situation non ramifiée

Les données sont les mêmes qu'en 1.5. On suppose

(1) F est local non archimédien ;

(2) G est non ramifié (quasi-déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée) ;

(3) $\mathbf{a}$ est non ramifié (si on note $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de F et $\Gamma_F^{nr} = Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, $\mathbf{a}$ provient par inflation d'un élément de $H^1(\Gamma_F^{nr}, Z(\hat{G}))$) ;

(4) $\tilde{G}(F)$ possède un sous-espace hyperspécial.

Expliquons cette dernière condition. Soit $K \subset G(F)$ un sous-groupe compact hyperspécial (il en existe d'après (2)). Le normalisateur $Norm_{\tilde{G}(F)}(K) = \{\gamma \in \tilde{G}(F); ad_\gamma(K) = K\}$ peut être vide. Sinon, c'est un espace principal homogène sous $Z(G;F)K$ et on appelle sous-espace hyperspécial une classe $\tilde{K} = \gamma K = K\gamma$ pour un élément $\gamma \in Norm_{\tilde{G}(F)}(K)$. On dit que $\tilde{G}(F)$ possède un sous-espace hyperspécial s'il existe K tel que $Norm_{\tilde{G}(F)}(K)$ ne soit pas vide.

Remarque. L'hypothèse que G est non ramifié n'implique pas l'existence d'un sous-espace hyperspécial. Par exemple, pour un entier $n \geq 1$ et un élément $d \in F^\times$, considérons $G = SL(n)$ et $\tilde{G} = \{g \in GL(n); det(g) = d\}$. On vérifie que $\tilde{G}(F)$ possède un sous-espace hyperspécial si et seulement si la valuation de d est divisible par n.

On fixe un couple $(K, \tilde{K})$ comme ci-dessus.

Dans certains cas (en particulier pour les applications globales), on peut imposer une hypothèse supplémentaire, à savoir

(Hyp) la caractéristique résiduelle p de F est grande, plus précisément $p > N(G)e_F + 1$, où $N(G)$ est l'entier dépendant de G défini en [W1] 4.3 et e_F est l'indice de ramification de $F/\mathbb{Q}_p$.

Nous ne l'imposons pas ici.

6.2 Données endoscopiques non ramifiées

On note $I_F \subset W_F$ le groupe d'inertie. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On dit qu'elle est non ramifiée si $I_F \subset \mathcal{G}'$. Cela entraîne :

(1) G' est non ramifié.

Preuve. Pour $w \in I_F$, soit $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ qui agit par $w_{G'}$ sur $\hat{G}'$. Puisque $w \in \mathcal{G}'$, on a aussi $g(w) \in \mathcal{G}'$. Puisque $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$, on a $g(w) \in \hat{G}'$. On a $w_{G'} = ad_{g(w)} \circ w_G = ad_{g(w)}$, car $w_G = 1$ (G est non ramifié). Donc $w_{G'}$ est un automorphisme intérieur de $\hat{G}'$. Il conserve par définition une paire de Borel épinglée, c'est donc l'identité. $\square$

On suppose désormais $\mathbf{G}'$ non ramifiée.

Rappelons que, si $\mathcal{E}$ est une paire de Borel épinglée de G définie sur F, la théorie de Bruhat-Tits lui associe un schéma en groupes $\mathcal{K}$ défini sur l'anneau des entiers $\mathfrak{o}$ de F, et $\mathcal{K}(\mathfrak{o})$ est un sous-groupe compact hyperspécial de $G(F)$. Réciproquement, tout tel sous-groupe est construit ainsi. Fixons donc une paire de Borel épinglée de G définie sur F dont est issu le groupe K déjà fixé. On peut la noter $\mathcal{E}^* = (B^*, T^*, (E^*_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$. Notons F^{nr} l'extension non ramifiée maximale de F et $\mathfrak{o}^{nr}$ son anneau d'entiers. Montrons que

(2) l'ensemble $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*)(F^{nr}) \cap T^*(\mathfrak{o}^{nr})\tilde{K}$ n'est pas vide.

Soit $\gamma \in \tilde{K}$. La paire $ad_\gamma(\mathcal{E}^*)$ est une paire de Borel épinglée définie sur F. Deux telles paires sont conjuguées sous le groupe adjoint $G_{AD}(F)$. Soit donc $x \in G_{AD}(F)$ tel que $ad_x \circ ad_\gamma(\mathcal{E}^*) = \mathcal{E}^*$. L'automorphisme $ad_x \circ ad_\gamma$ est défini sur F. Puisqu'il conserve $\mathcal{E}^*$, il conserve aussi le sous-groupe hyperspécial associé à $\mathcal{E}$: $ad_x \circ ad_\gamma(K) = K$. Puisque $ad_\gamma(K) = K$, on a donc $ad_x(K) = K$. Cela entraîne que x appartient au sous-groupe hyperspécial K_{AD} de $G_{AD}(F)$ associé à la paire de Borel épinglée $(B^*_{ad}, T^*_{ad}, (E^*_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ déduite de $\mathcal{E}^*$. On montre que l'application produit

$$T^*_{ad}(\mathfrak{o}) \times K \to K_{AD}$$

et l'application naturelle

$$T^*(\mathfrak{o}^{nr}) \to T^*_{ad}(\mathfrak{o}^{nr})$$

sont toutes deux surjectives. Donc x est l'image dans $G_{AD}(F)$ d'un produit tk, avec $t \in T(\mathfrak{o}^{nr})$ et $k \in K$. Puisque $ad_x \circ ad_\gamma(\mathcal{E}^*) = \mathcal{E}^*$, on a $tk\gamma \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*)$. On a aussi $tk\gamma \in T(\mathfrak{o}^{nr})\tilde{K}$. Cela prouve (2). $\square$

Fixons un élément $e \in \mathcal{Z}(\tilde{G})(F^{nr})$, image d'un élément de l'intersection $Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*)(F^{nr}) \cap T(\mathfrak{o}^{nr})\tilde{K}$, soit e' son image dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')(F^{nr})$. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}' = (B', T', (E'_\alpha)_{\alpha\in\Delta'})$ de G' définie sur F. Soit K' le sous-groupe compact hyperspécial de $G'(F)$ qui s'en déduit. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, soit $z'(\sigma) \in Z(G')$ tel que $e' = z'(\sigma)\sigma(e')$. Par construction, le cocycle z' est non ramifié et prend ses valeurs dans $T'(\mathfrak{o}^{nr})$. Or ce groupe est cohomologiquement trivial (cela résulte du théorème de Lang). On peut choisir $t' \in T'(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $z'(\sigma) = \sigma(t')t'^{-1}$. Alors $t'e' \in \tilde{G}'(F)$ et il est clair que $t'e' \in Norm_{\tilde{G}'(F)}(K')$. L'ensemble $\tilde{K}' = K't'e'$ est un sous-espace hyperspécial de $\tilde{G}'(F)$. On voit qu'il ne dépend pas des choix de e et t'. La classe de conjugaison par $G'_{AD}(F)$ du couple $(K', \tilde{K}')$ ne dépend pas des choix des paires de Borel épinglées. Elle dépend par contre du couple $(K, \tilde{K})$ que l'on a fixé.

Ainsi l'espace $\tilde{K}$ que l'on a fixé détermine un espace analogue $\tilde{K}'$ pour $\tilde{G}'(F)$, à conjugaison près par $G'_{AD}(F)$. Dans les raisonnements par récurrence, et dans ce qui suit, $\tilde{G}'(F)$ sera supposé muni d'un tel ensemble $\tilde{K}'$ issu de $\tilde{K}$.

Lemme. *La donnée* $\mathbf{G}'$ *est relevante.*

Preuve. Notons θ^* l'automorphisme ad_e pour tout élément $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*)$. Il est défini sur F. Introduisons le groupe $G_1 = G^{\theta^*,0}$. A $\mathcal{E}^*$ est associé une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_1 = (B_1, T_1, (E_{\alpha_1})_{\alpha_1\in\Delta_1})$ de G_1. On a $B_1 = B^* \cap G_1$, $T_1 = T^* \cap G_1$, Δ_1 est l'image de Δ par restriction à T_1. Pour $\alpha_1 \in \Delta_1$, E_{α_1} est la somme des E_α pour $\alpha \in \Delta$ de restriction α_1 (ces α forment une seule orbite pour l'action du groupe engendré par θ^*). De la paire $\mathcal{E}_1$ est issu un sous-groupe compact hyperspécial K_1 de $G_1(F)$. Il résulte des constructions de Bruhat et Tits que $K_1 \subset K$. Des paires $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{E}'$ est issu un homomorphisme $\xi_{T^*,T'} : T^* \to T'$. Il existe un cocycle $\omega_{G'} : \Gamma_F \to W^{\theta^*}$ tel que $\sigma(\xi_{T^*,T'}) = \xi_{T^*,T'} \circ \omega_{G'}(\sigma)$. Il est évidemment non ramifié. Choisissons un élément de Frobenius $\phi \in \Gamma_F$. Introduisons la section de

Springer $n_1 : W^{\theta^*} \to G_1$. Comme on l'a dit, à K_1 est associé un schéma en groupes $\mathcal{K}_1$ sur $\mathfrak{o}$ tel que $\mathcal{K}_1 \times_{\mathfrak{o}} F = G_1$ et $\mathcal{K}_1(\mathfrak{o}) = K_1$. Il résulte des constructions que n_1 prend ses valeurs dans $\mathcal{K}_1(\mathfrak{o}^{nr})$. Posons $x = n_1(\omega_{G'}(\phi))$. On vérifie que x appartient à un sous-groupe fini de $\mathcal{K}_1(\mathfrak{o}^{nr})$ invariant par Γ_F (le groupe engendré par l'image de n_1 et les éléments d'ordre 2 de $T_1(\mathfrak{o}^{nr})$ convient). Appliquant par exemple [W1] 4.2(1), on voit qu'il existe $k \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $x = k\phi(k)^{-1}$. Posons $\mathcal{E} = ad_{k^{-1}}(\mathcal{E}^*)$, notons (B,T) la paire de Borel sous-jacente à $\mathcal{E}$. L'homomorphisme $\xi_{T,T'}$ déduit de cette paire et de $\mathcal{E}'$ est $\xi_{T^*,T'} \circ ad_k$. D'après les constructions, il est équivariant pour les actions galoisiennes. Fixons $e \in Z(\tilde{G},\mathcal{E}^*)(F^{nr}) \cap T^*(\mathfrak{o}^{nr})\tilde{K}$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, soit $z(\sigma) \in Z(G)$ tel que $e = z(\sigma)\sigma(e)$. Alors z est un cocycle non ramifié à valeurs dans $Z(G) \cap T^*(\mathfrak{o}^{nr})$. Mais $Z(G) \cap T^*(\mathfrak{o}^{nr}) = Z(G) \cap T(\mathfrak{o}^{nr})$. Le groupe $T(\mathfrak{o}^{nr})$ étant cohomologiquement trivial, on peut choisir $\tau \in T(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $z(\sigma) = \sigma(\tau)\tau^{-1}$. Alors $\tau e \in \tilde{G}(F)$. Puisque $T(\mathfrak{o}^{nr})$ et $T^*(\mathfrak{o}_{nr})$ sont tous deux inclus dans $\mathcal{K}(\mathfrak{o}^{nr})$ (où $\mathcal{K}$ est le schéma en groupes associé à K), on a même $\tau e \in \tilde{K}$. Puisque $k \in G_1$, la paire $\mathcal{E}$ est fixée par $\theta^* = ad_e$. Il en résulte que $ad_{\tau e}$ conserve (B,T). Soit maintenant $t \in T(\mathfrak{o})$, posons $\gamma = t\tau e$. Notons e' l'image de $e \in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$, posons $t' = \xi_{T,T'}(t\tau)$ et $\delta = t'e'$. Il est clair que $\delta \in \tilde{G}'(F)$ et que $(\delta, B', T', B, T, \gamma)$ est un diagramme. Si t est en position générale, γ est fortement régulier, donc $(\delta,\gamma) \in \mathcal{D}(\mathbf{G}')$. $\square$

6.3 Facteur de transfert

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique non ramifiée de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Considérons des données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$. On dit qu'elles sont non ramifiées si G'_1 est non ramifié et le plongement $\hat{\xi}_1 : \mathcal{G}' \to {}^LG'_1$ est l'identité sur I_F. De telles données existent. En fait

(1) on peut choisir $G'_1 = G'$.

Preuve. On normalise l'action galoisienne sur $\hat{G}$ et $\hat{G}'$ en fixant des paires de Borel épinglées de ces groupes et en imposant que les actions conservent ces paires. Choisissons un Frobenius $\phi \in W_F$ et un élément $g_\phi \in \mathcal{G}'$ agissant comme $\phi_{G'}$ sur $\hat{G}'$. Alors $\mathcal{G}'$ est le produit semi-direct $(\hat{G}' \times I_F) \rtimes g_\phi^{\mathbb{Z}}$. On définit une application $\hat{\xi}_1 : \mathcal{G}' \to {}^LG'$ par $\hat{\xi}_1((x,w)g_\phi^n) = (x, w\phi^n)$ pour $x \in \hat{G}'$, $w \in I_F$, $n \in \mathbb{Z}$. C'est un isomorphisme. $\square$

Supposons les données auxiliaires non ramifiées. De K' se déduit un sous-groupe compact hyperspécial K'_1 de $G'_1(F)$. Choisissons un élément $\delta_{1,0} \in \tilde{G}'_1(F)$ dont l'image δ_0 dans $\tilde{G}'(F)$ appartient à $\tilde{K}'$. Alors $\tilde{K}'_1 = K'_1\delta_{1,0}$ est un sous-espace hyperspécial de $\tilde{G}'_1(F)$. Ce sous-espace étant fixé, nous allons définir un facteur de transfert Δ_1 sur $\mathcal{D}_1$.

On fixe $g_\phi = (g(\phi), \phi) \in \mathcal{G}'$ comme dans la preuve de (1) ci-dessus et un élément $g_{sc}(\phi) \in \hat{G}_{SC}$ dont l'image dans $\hat{G}_{AD}$ est la même que celle de $g(\phi)$. Il existe un unique cocycle $w \mapsto g(w)$ de W_F dans $\hat{G}$ qui est non ramifié et tel que $g(\phi)$ soit l'élément que l'on vient de fixer. De même, il existe un unique cocycle $w \mapsto g_{sc}(w)$ de W_F dans $\hat{G}_{SC}$ qui est non ramifié et tel que $g_{sc}(\phi)$ soit l'élément que l'on vient de fixer. Soit $w \mapsto z(w)$ le cocycle de W_F dans $Z(\hat{G})$ tel que $g(w) = z(w)\pi(g_{sc}(w))$. On a évidemment $(g(w), w) \in \mathcal{G}'$ pour tout $w \in W_F$ et on pose $\hat{\xi}_1(g(w), w) = (\zeta_1(w), w)$. L'application ζ_1 est un cocycle de W_F dans $Z(\hat{G}'_1)$. Les cocycles z et ζ_1 déterminent des caractères λ_z de $G(F)$ et λ_{ζ_1} de $G'_1(F)$. Parce que les cocycles sont non ramifiés, λ_z est trivial sur K et λ_{ζ_1} est trivial sur K'_1 ([W1] 4.1(1)). Il existe donc une unique application $\tilde{\lambda}_z : \tilde{G}(F) \to \mathbb{C}^\times$ qui vaut 1 sur $\tilde{K}$ et vérifie $\tilde{\lambda}_z(g\gamma) = \lambda_z(g)\tilde{\lambda}_z(\gamma)$ pour tous $g \in G(F)$ et $\gamma \in \tilde{G}(F)$. De même, il existe une unique application $\tilde{\lambda}_{\zeta_1} : \tilde{G}'_1(F) \to \mathbb{C}^\times$ qui vaut 1 sur $\tilde{K}'_1$ et vérifie

$\tilde{\lambda}_{\zeta_1}(g_1\delta_1) = \lambda_{\zeta_1}(g_1)\tilde{\lambda}_{\zeta_1}(\delta_1)$ pour tous $g_1 \in G'_1(F)$ et $\delta_1 \in \tilde{G}'_1(F)$.

On fixe comme en 6.2 une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$ de G, définie sur F, dont le groupe K est issu. Soit $(\delta_1,\gamma) \in \mathcal{D}_1$. On fixe un diagramme $(\delta, B', T', B, T, \gamma)$ et on utilise les constructions de 2.2. En particulier, on complète (B,T) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$. On fixe $g \in G_{SC}$ tel que $ad_g(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^*$. On choisit pour cochaîne $u_{\mathcal{E}}$ l'application $u_{\mathcal{E}}(\sigma) = g^{-1}\sigma(g)$. On fixe $e \in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$. Comme en 2.2, on définit une cochaîne $V_T : \Gamma_F \to T_{sc}$ par

$$V_T(\sigma) = r_T(\sigma)n_{\mathcal{E}}(\omega_T(\sigma))u_{\mathcal{E}}(\sigma).$$

La cochaîne V_T est un cocycle. On écrit $\gamma = \nu e$, avec $\nu \in T$. On note ν_{ad} l'image de ν dans T_{ad}. Alors le couple (V_T, ν_{ad}) appartient à $Z^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} T_{ad})$. On définit une cochaine $t_{T,sc} : W_F \to \hat{T}_{sc}$ par la même formule qu'en 2.2 :

$$t_{T,sc}(w) = \hat{r}_T(w)\hat{n}(\omega_T(w))g_{sc}(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{T,G'}(w))^{-1}\hat{r}_{T,G'}(w)^{-1}.$$

C'est un cocycle. On note s_{ad} l'image de s dans $\hat{T}_{ad}$ (rappelons que $\tilde{s} = s\hat{\theta}$). Le couple $(t_{T,sc}, s_{ad})$ appartient à $Z^{1,0}(W_F; \hat{T}_{sc} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{ad})$. On dispose du produit

$$< .,. >: H^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} T_{ad}) \times H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{sc} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{ad}) \to \mathbb{C}^\times.$$

On pose

$$\Delta_{imp}(\delta_1,\gamma) = \tilde{\lambda}_{\zeta_1}(\delta_1)^{-1}\tilde{\lambda}_z(\gamma) < (V_T, \nu_{ad}), (t_{T,sc}, s_{ad}) >^{-1}$$

et

$$\Delta_1(\delta_1,\gamma) = \Delta_{II}(\delta,\gamma)\Delta_{imp}(\delta_1,\gamma).$$

Lemme. *(i) Le facteur Δ_1 ne dépend que des choix des sous-espaces hyperspéciaux $\tilde{K}$ et $\tilde{K}'_1$, c'est-à-dire qu'il ne dépend d'aucune autre donnée auxiliaire.*

(ii) Pour $(\delta_1,\gamma), (\underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) \in \mathcal{D}_1$, on a l'égalité

$$\boldsymbol{\Delta}_1(\delta_1,\gamma; \underline{\delta}_1, \underline{\gamma}) = \Delta_1(\delta_1,\gamma)\Delta_1(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma})^{-1}.$$

Preuve. On commence par démontrer (ii), sous la réserve que les choix de données auxiliaires pour les deux paires (δ_1,γ) et $(\underline{\delta}_1, \underline{\gamma})$ soient cohérents. Dans les constructions de 2.2 intervient un élément $r \in G_{SC}$ tel que $ad_r(\mathcal{E}) = \underline{\mathcal{E}}$. Puisqu'on a choisi $g \in G_{SC}$ tel que $ad_g(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^*$ et de même $\underline{g} \in G_{SC}$ tel que $ad_{\underline{g}}(\underline{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}^*$, on peut choisir et on choisit $r = \underline{g}^{-1}g$. Il est clair que le cocycle V de 2.2 est l'image de $(V_T, V_{\underline{T}}^{-1})$ par l'homomorphisme naturel $T_{sc} \times \underline{T}_{sc} \to U$. En utilisant la compatibilité des produits aux deux diagrammes duaux

$$\begin{tikzcd} T_{sc} \times \underline{T}_{sc} \arrow[r, "1-\theta"] \arrow[d] & S_1 \arrow[d] \\ U \arrow[r, "1-\theta"] & S_1 \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} \hat{S}_1 \arrow[r, "1-\hat{\theta}"] & \hat{T}_{ad} \times \hat{\underline{T}}_{ad} \\ \hat{S}_1 \arrow[u] \arrow[r, "1-\hat{\theta}"] & \hat{U}, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

on voit que

$$\Delta_{imp}(\delta_1,\gamma;\underline{\delta}_1,\underline{\gamma}) = < ((V_T, V_{\underline{T}}^{-1}), \boldsymbol{\nu}_1), (\hat{V}_1, (s_{ad}, s_{ad})) >^{-1},$$

le produit étant celui sur

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc}\times \underline{T}_{sc} \overset{1-\theta}{\to} S_1)\times H^{1,0}(W_F;\hat{S}_1 \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{ad}\times\hat{T}_{ad}).$$

Le cocycle $\hat{V}_1$ est le produit des deux cocycles suivants :

- l'image $\hat{V}_{sc}$ de $(t_{T,sc}, t_{\underline{T},sc})$ par l'homomorphisme naturel $\hat{q} : \hat{T}_{sc}\times \hat{\underline{T}}_{sc} \to \hat{S}_1$ qui, à $(t_{sc},\underline{t}_{sc})$, associe $\hat{q}(t_{sc},\underline{t}_{sc}) = (j(t_{sc}), j(\underline{t}_{sc}), t_{sc}\underline{t}_{sc}^{-1})$;

- le cocycle $w\mapsto Z(w) = ((\zeta_1(w), z(w)^{-1}), (\zeta_1(w), z(w)^{-1}), 1) \in \hat{S}_1$.

Et le cocycle $(\hat{V}_1,(s_{ad},s_{ad}))$ est le produit des deux cocycles $(\hat{V}_{sc},(s_{ad},s_{ad}))$ et du cocycle $(Z,1)$. On en déduit l'égalité

$$(2)\qquad \boldsymbol{\Delta}_{imp}(\delta_1,\gamma;\underline{\delta}_1,\underline{\gamma}) = < ((V_T,V_{\underline{T}}^{-1}),\boldsymbol{\nu}_1),(\hat{V}_{sc},(s_{ad},s_{ad})) >^{-1} < (V_T,V_{\underline{T}}^{-1}),\boldsymbol{\nu}_1),(Z,1) >^{-1}.$$

En utilisant de nouveau une compatibilité des produits, le premier terme est égal à

$$(3)\qquad < ((V_T,V_{\underline{T}}^{-1}), q(\boldsymbol{\nu}_1)), ((t_{T,sc}, t_{\underline{T},sc}), (s_{ad},s_{ad})) >^{-1},$$

où $q: S_1\to T_{ad}\times \underline{T}_{ad}$ est dual de l'homomorphisme $\hat{q}$ défini ci-dessus. On voit que $q(\boldsymbol{\nu}_1) = (\nu_{ad}, \underline{\nu}_{ad})$. Le produit ci-dessus est maintenant celui sur

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc}\times\underline{T}_{sc} \overset{1-\theta}{\to} T_{ad}\times\underline{T}_{ad})\times H^{1,0}(W_F; \hat{T}_{sc}\times\hat{\underline{T}}_{sc} \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{ad}\times\hat{\underline{T}}_{ad}).$$

Ces espaces comme ce produit se scindent selon les termes provenant de T et ceux provenant de $\underline{T}$. Le produit (3) est alors égal à

$$(4)\qquad < (V_T,\nu_{ad}),(t_{T,sc},s_{ad}) >^{-1} < (V_{\underline{T}},\underline{\nu}_{ad}),(t_{\underline{T},sc},s_{ad}) > .$$

Introduisons le tore $\hat{R}$ formé des $(t,\underline{t},t_{sc}) \in \hat{T}\times\hat{\underline{T}}\times\hat{T}_{sc}$ tels que $j(t_{sc}) = t\underline{t}^{-1}$ et le tore $\hat{R}_1$ formé des $(t,\underline{t},t_{sc})\in \hat{T}_1'\times\hat{\underline{T}}_1'\times\hat{T}_{sc}^{\hat{\theta}}$ tels que $j(t_{sc}) = t\underline{t}^{-1}$. On a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \overset{\hat{\pi}}{\to} & \hat{T}_{ad}\times\hat{\underline{T}}_{ad} \\ \hat{\rho}\downarrow & & 1-\hat{\theta}\downarrow \\ \hat{S}_1 & \overset{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{T}_{ad}\times\hat{\underline{T}}_{ad}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \hat{R}_1 & \to & 1 \\ \hat{\rho}_1\downarrow & & \downarrow \\ \hat{S}_1 & \overset{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{T}_{ad}\times\hat{\underline{T}}_{ad}, \end{array}$$

où $\hat{\pi}$, $\hat{\rho}$ et $\hat{\rho}_1$ sont les homomorphismes naturels. On introduit aussi les tores duaux R et R_1 et les homomorphismes $\pi: T_{sc}\times\underline{T}_{sc}\to R$, $\rho: S_1\to R$ et $\rho_1 : S_1\to R_1$ duaux de $\hat{\pi}$, $\hat{\rho}$ et $\hat{\rho}_1$. Le cocycle Z est le produit des images des deux cocycles suivants :

- l'inverse du cocycle $\boldsymbol{z} : w\mapsto (z(w), z(w), 1)\in\hat{R}$;

- le cocycle $\boldsymbol{\zeta}_1 : w\mapsto (\zeta_1(w),\zeta_1(w),1)\in\hat{R}_1$.

On utilise la compatibilité des produits aux diagrammes ci-dessus et la relation [KS1] A.3.13 (où le signe disparaît d'après [KS2] 4.3). On voit que le deuxième terme de (2) est égal à

$$(5)\qquad < (((1-\theta)(V_T),(1-\theta)(V_{\underline{T}}^{-1})),\rho(\boldsymbol{\nu}_1)),(\mathbf{z},1) > < \rho_1(\boldsymbol{\nu}_1),\boldsymbol{\zeta}_1 >^{-1},$$

le premier produit étant celui sur

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_{sc}\times \underline{T}_{sc} \xrightarrow{\pi} R)\times H^{1,0}(W_F;\hat{R}\xrightarrow{\hat{\pi}} \hat{T}_{ad}\times \underline{\hat{T}}_{ad})$$

et le second celui sur

$$H^{1,0}(\Gamma_F;R_1)\times H^{1,0}(W_F;\hat{R}_1).$$

On a l'égalité $R_1 = (T'_1\times \underline{T}'_1)/diag_-(Z(G'_1,G))$, où $Z(G'_1,G)$ est le sous-groupe des éléments de $Z(G'_1)$ dont l'image dans $Z(G')$ appartient à l'image naturelle de $Z(G)$ (ou encore, c'est la projection dans $Z(G'_1)$ du groupe $\mathfrak{Z}_1$ de 2.2). Le tore R_1 est un sous-tore maximal du groupe $(G'_1\times G'_1)/diag_-(Z(G'_1,G))$. L'élément $\rho_1(\boldsymbol{\nu}_1)$ est égal à l'image dans R_1 de $(\mu_1,\underline{\mu}_1^{-1})$. Son image dans $(G'_1\times G'_1)/diag_-(Z(G'_1,G))$ est celle de $(x\underline{\mu}_1,\underline{\mu}_1^{-1})$, où $x\in G'_1(F)$ est l'élément tel que $x\delta_1=\underline{\delta}_1$. Le calcul de la preuve du lemme 2.5 montre que le produit de cet élément avec $\boldsymbol{\zeta}_1$ vaut $\lambda_{\zeta_1}(x)$. En appliquant les définitions, on obtient

$$(6)\qquad <\rho_1(\boldsymbol{\nu}_1),\boldsymbol{\zeta}_1>^{-1}=\tilde{\lambda}_{\zeta_1}(\delta_1)^{-1}\tilde{\lambda}_{\zeta_1}(\underline{\delta}_1).$$

On a l'égalité $R=(T\times \underline{T})/diag_-(Z(G))$. C'est un sous-tore maximal du groupe $G^\flat=(G\times G)/diag_-(Z(G))$. On a l'égalité $G^\flat_{SC}=G_{SC}\times G_{SC}$ et $T_{sc}\times\underline{T}_{sc}$ est l'image réciproque de R dans $G^\flat_{SC}$. On se retrouve dans la situation de 2.4. C'est-à-dire que $\mathbf{z}$ est un cocycle à valeurs dans $Z(\hat{G}^\flat)$ qui détermine un caractère $\lambda_{\mathbf{z}}$ du groupe $G^\flat(F)$. Si $(((1-\theta)(V_T),(1-\theta)(V_{\underline{T}}^{-1})),\rho(\boldsymbol{\nu}_1))$ est l'image de $y^\flat\in G^\flat(F)$ par l'homomorphisme surjectif

$$G^\flat(F)\to H^{1,0}(\Gamma_F;T_{sc}\times\underline{T}_{sc}\xrightarrow{\pi} R),$$

on a l'égalité

$$(7)\qquad <(((1-\theta)(V_T^{-1}),(1-\theta)(V_{\underline{T}})),\rho(\boldsymbol{\nu}_1)),(\mathbf{z},1)>=\lambda_{\mathbf{z}}(y^\flat).$$

Il reste à calculer un élément $y^\flat$ vérifiant la propriété ci-dessus. Introduisons l'élément $e^*=geg^{-1}\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}^*)$. Remarquons que, d'après nos choix, on a aussi $e^*=\underline{g}\underline{e}\underline{g}^{-1}$. Ecrivons $\gamma=ye^*$, $\underline{\gamma}=\underline{y}e^*$ avec $y,\underline{y}\in G$. Puisque $\mathcal{E}^*$ est défini sur F, on a $\sigma(e^*)\in Z(G)e^*$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Il en résulte que l'image de $(y,\underline{y}^{-1})$ dans $G^\flat$ appartient à $G^\flat(F)$. Montrons que

(8) on peut choisir pour $y^\flat$ l'image de $(y,\underline{y}^{-1})$ dans $G^\flat(F)$.

Décomposons ν en $\pi(\nu_{sc})\nu_Z$, avec $\nu_Z\in Z(G)$ et $\nu_{sc}\in T_{sc}$. On a $\gamma=\nu e=\nu g^{-1}e^*g=\nu g^{-1}ad_{e^*}(g)e^*$. Donc $y=\pi(y_{sc})\nu_Z$, avec $y_{sc}=\nu_{sc}g^{-1}ad_{e^*}(g)$. On définit le cocycle $\tau:\Gamma_F\to Z(G_{SC})$ par $\tau(\sigma)=y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}$. En utilisant des notations analogues pour l'élément $\underline{\gamma}$, le calcul de 2.4 montre que l'image de $(y,\underline{y}^{-1})$ dans $H^{1,0}(\Gamma_F;T_{sc}\times\underline{T}_{sc}\xrightarrow{\pi} R)$ est le cocycle $((\tau,\underline{\tau}^{-1}),(\nu_Z,\underline{\nu}_Z^{-1}))$. On doit montrer que celui-ci est cohomologue à $(((1-\theta)(V_T),(1-\theta)(V_{\underline{T}}^{-1})),\rho(\boldsymbol{\nu}_1))$. Tout d'abord, on a l'égalité $\rho(\boldsymbol{\nu}_1)=(\nu,\underline{\nu}^{-1})$. Donc $(((1-\theta)(V_T),(1-\theta)(V_{\underline{T}}^{-1})),\rho(\boldsymbol{\nu}_1))$ est cohomologue à $((\tau',(\underline{\tau}')^{-1}),(\nu_Z,\underline{\nu}_Z^{-1}))$, où $\tau'(\sigma)=\nu_{sc}(1-\theta)(V_T(\sigma))\sigma(\nu_{sc})^{-1}$. Rappelons que le θ de cette relation est plus précisément ad_e, c'est-à-dire $ad_g^{-1}\circ ad_{e^*}\circ ad_g$. En reprenant la définition de V_T et en se rappelant que les termes $r_T(\sigma)$ et $n_{\mathcal{E}}(\omega_T(\sigma))$ sont fixes par ad_e, on obtient

$$\tau'(\sigma)=\nu_{sc}ad_e(u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1})u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(\nu_{sc})^{-1}$$

$$=\nu_{sc}\,ad_g^{-1}\circ ad_{e^*}\circ ad_g(\sigma(g)^{-1}g)g^{-1}\sigma(g)\sigma(\nu_{sc})^{-1}$$

$$=\nu_{sc}g^{-1}ad_{e^*}(g\sigma(g)^{-1})\sigma(g\nu_{sc}^{-1}).$$

L'automorphisme ad_{e^*} est défini sur F. D'où

$$\tau'(\sigma)=\nu_{sc}g^{-1}ad_{e^*}(g)\sigma(ad_{e^*}(g^{-1})g\nu_{sc}^{-1})=y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}=\tau(\sigma).$$

Un calcul analogue vaut pour $\underline{\tau}'$, ce qui démontre (8).

On peut donc appliquer (7) en prenant pour $y^\flat$ l'image de $(y,\underline{y}^{-1})$. Un calcul analogue à celui de la preuve du lemme 2.5 montre que $\lambda_{\mathbf{z}}(y^\flat)=\lambda_z(x)$, où x est l'élément de $G(F)$ tel que $y=x\underline{y}$ ou encore $\gamma=x\underline{\gamma}$. D'où

$$(9) <(((1-\theta)(V_T),(1-\theta)(V_{\underline{T}}^{-1})),\rho(\boldsymbol{\nu}_1)),(\mathbf{z},1)>=\tilde{\lambda}_z(\gamma)\tilde{\lambda}_z(\underline{\gamma})^{-1}.$$

Rassemblons nos calculs. Le facteur $\boldsymbol{\Delta}_{imp}(\delta_1,\gamma;\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})$ est le produit des termes (4), (6) et (9). Autrement dit

$$\boldsymbol{\Delta}_{imp}(\delta_1,\gamma;\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})=\Delta_{imp}(\delta_1,\gamma)\Delta_{imp}(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})^{-1}.$$

Cela démontre le (ii) de l'énoncé.

Prouvons maintenant l'assertion (i). Les données auxiliaires pour une paire (δ_1,γ) sont

(10) le diagramme $(\delta,B',T',B,T,\gamma)$, la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$, l'élément $g\in G_{SC}$, les a-data et les χ-data ;

(11) la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$, les paires de Borel épinglées des groupes duaux, les termes $g(\phi)$ et $g_{sc}(\phi)$;

(12) l'élément $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$.

On voit tout de suite que le choix de e n'influe pas : ce terme ne sert qu'à définir ad_e et ν. L'automorphisme ad_e ne dépend pas du choix de e. Le terme ν en dépend, mais il n'intervient que via ν_{ad} qui, lui, n'en dépend pas. Quand on considère deux couples (δ_1,γ) et $(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})$, faire des choix cohérents signifie que l'on prend les mêmes objets (11) pour les deux couples (il y a aussi une condition portant sur les termes e et $\underline{e}$, mais on peut l'oublier d'après ce que l'on vient de dire). Il n'y a aucune condition de cohérence portant sur les objets (10). Puisque $\boldsymbol{\Delta}_1(\delta_1,\gamma;\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})$ ne dépend d'aucun choix et puisque $\Delta_1(\underline{\delta}_1,\underline{\gamma})$ ne dépend pas des objets (10) relatifs au couple (δ_1,γ), on déduit de notre preuve (partielle) de (ii) que $\Delta_1(\delta_1,\gamma)$ ne dépend pas des objets (10) et qu'il ne dépend des objets (11) que par multiplication par un scalaire. Il nous suffit donc de prouver que pour un couple particulier (δ_1,γ), le facteur $\Delta_1(\delta_1,\gamma)$ ne dépend pas des objets (11). On choisit l'une des paires (δ,γ) que l'on a construites dans la preuve du lemme 6.2. L'élément δ appartient à l'espace $\tilde{K}'$. On vérifie facilement que l'application $\tilde{K}'_1\to\tilde{K}'$ est surjective. On relève δ en un élément $\delta_1\in\tilde{K}'_1$. On choisit pour diagramme et pour élément g le diagramme et l'élément k que l'on a construits dans cette preuve. Les tores T et T' sont non ramifiés. On peut supposer que χ_α est trivial pour un élément $\alpha\in\Sigma(T)_{res,ind}$ appartenant à une orbite asymétrique et est non ramifié pour un α appartenant à une orbite symétrique. Cette dernière condition détermine χ_α : on a $\chi_\alpha(x)=(-1)^{val_{F_\alpha}(x)}$ pour $x\in F_\alpha$, où val_{F_α} est la valuation usuelle de F_α. On peut aussi supposer que les a-data a_α sont des unités de F_α. Il résulte alors des constructions que (V_T,ν_{ad}) appartient à

$$H^{1,0}(\Gamma_F/\Gamma_{F^{nr}};T_{sc}(\mathfrak{o}^{nr})\stackrel{1-\theta}{\to}T_{ad}(\mathfrak{o}^{nr})).$$

Par ailleurs, $(t_{T,sc},s_{ad})$ appartient à

$$H^{1,0}(W_F/W_{F^{nr}};\hat{T}_{sc}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}_{ad}).$$

Or la restriction de la dualité de Kottwitz-Shelstad au produit des deux groupes ci-dessus est triviale. Donc

$$<(V_T,\nu_{ad}),(t_{T,sc},s_{ad})>=1.$$

Puisque $\delta_1\in\tilde{K}'_1$ et $\gamma\in\tilde{K}$, on a $\tilde{\lambda}_{\zeta_1}(\delta_1)=\tilde{\lambda}_z(\gamma)=1$. D'où $\Delta_{imp}(\delta_1,\gamma)=1$ et $\Delta_1(\delta_1,\gamma)=\Delta_{II}(\delta,\gamma)$. Ce terme ne dépendant pas des données (11), cela achève la démonstration. □

Dans [W1], on a donné une autre façon de normaliser le facteur de transfert, sous l'hypothèse (Hyp) de 6.1. On a

(13) sous l'hypothèse (Hyp), le facteur de [W1] coïncide avec celui ci-dessus.

Le facteur de [W1] est caractérisé par le fait que, pous (δ_1,γ) appartenant à un certain sous-ensemble $\mathcal{D}_{1,nr}\subset\mathcal{D}_1$, on a $\Delta_1(\delta_1,\gamma)=\Delta_{II}(\delta,\gamma)$. Or, parmi les couples que l'on a considéré à la fin de la démonstration ci-dessus, il y en a qui appartiennent à $\mathcal{D}_{1,nr}$. On a prouvé que notre présent facteur vérifiait l'égalité ci-dessus pour ces couples-là. Cela conclut. □

6.4 Le lemme fondamental

On suppose $\mathbf{G}'$ non ramifié. Considérons des données auxiliaires G'_1,..., $\hat{\xi}_1$ non ramifiées. On fixe comme dans le paragraphe précédent un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}'_1\subset\tilde{G}'_1(F)$. Notons $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ la fonction caractéristique de $\tilde{K}$ et $\mathbf{1}_{\tilde{K}'_1,\lambda_1}$ l'élément de $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ qui est à support dans $C_1(F)\tilde{K}'_1$ et vaut 1 sur $\tilde{K}'_1$. On utilise le facteur de transfert normalisé de 6.3 pour définir la notion de transfert. Grâce à Ngo Bao Chau, on a :

Théorème (lemme fondamental pour les unités). $\mathbf{1}_{\tilde{K}'_1,\lambda_1}$ *est un transfert de* $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$.

Notons $\mathcal{H}$, resp. $\mathcal{H}'_1$, l'algèbre des fonctions sur $G(F)$, resp. $G'_1(F)$, à support compact et biinvariantes par K, resp. K'_1. Notons $\phi\in W_F$ un élément de Frobenius et $\hat{\mathcal{H}}$, resp. $\hat{\mathcal{H}}'$, resp. $\hat{\mathcal{H}}'_1$, l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\hat{G}\rtimes\phi\subset {}^LG$, resp. $\mathcal{G}\cap(\hat{G}\rtimes\phi)$, resp. $\hat{G}'_1\rtimes\phi\subset {}^LG'_1$, invariantes par conjugaison par $\hat{G}$, resp. $\hat{G}'$, resp. $\hat{G}'_1$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \stackrel{\text{Satake}}{\simeq} & \hat{\mathcal{H}} \\ & & \downarrow \ \text{restriction} \\ & & \hat{\mathcal{H}}' \\ & & \uparrow \ \text{restriction} \\ \mathcal{H}'_1 & \stackrel{\text{Satake}}{\simeq} & \hat{\mathcal{H}}'_1 \end{array}$$

D'autre part, $\mathcal{H}$ agit par convolution à droite et à gauche sur $C^\infty_c(\tilde{G}(F))$ et $\mathcal{H}'_1$ agit par convolution à droite et à gauche sur $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$. On peut peut-être énoncer un lemme fondamental sous la forme suivante.

Conjecture. *Soient* $h\in\mathcal{H}$ *et* $h'_1\in\mathcal{H}'_1$. *On suppose que* h *et* h'_1 *ont même image dans* $\hat{\mathcal{H}}'$. *Alors* $h'_1*\mathbf{1}_{\tilde{K}'_1,\lambda_1}=\mathbf{1}_{\tilde{K}'_1,\lambda_1}*h'_1$ *est un transfert de* $h*\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ *comme de* $\mathbf{1}_{\tilde{K}}*(\omega^{-1}h)$.

Ces énoncés se traduisent aisément selon le formalisme introduit en 2.5. A l'aide du facteur de transfert normalisé, on identifie $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ à $C^\infty_c(\mathbf{G}')$. Notons $\mathbf{1}_{\tilde{K}',\mathbf{G}'}$ l'image de $\mathbf{1}_{\tilde{K}'_1,\lambda_1}$ dans ce dernier espace. On vérifie qu'elle ne dépend pas des données auxiliaires choisies. Le théorème signifie que cet élément est un transfert de $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$. De même, on peut introduire une algèbre $\mathcal{H}'$ limite inductive des algèbres $\mathcal{H}'_1$ quand G'_1,..., Δ_1 parcourent toutes les données auxiliaires non ramifiées. Elle s'identifie, mais de façon non canonique, à l'algèbre des fonctions sur $G'(F)$ à support compact et biinvariantes par K'. L'isomorphisme de Satake identifie $\mathcal{H}'$ à $\hat{\mathcal{H}}'$. L'algèbre $\mathcal{H}'$ agit sur $C_c^\infty(\mathbf{G}')$ et la conjecture ci-dessus se récrit immédiatement en termes de cette action.

Bibliographie

[A1] J. Arthur : *On the transfer of distributions : weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 99 (1999), p. 209-283

[A2] ——— : *On local character relations*, Selecta math. 2 (1996), p. 501-579

[A3] ——— : *Germ expansions for real groups*

[Bor] A. Borel : *Automorphic L-functions*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. of Symposia in Pure Math XXXIII, part 2, A. Borel et W. Casselman ed., AMS 1979

[Boua] A. Bouaziz : *Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs*, Ann. Sc. ENS 27 (1994), p. 573-609

[Bour] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5 et 6*, Hermann 1968

[K1] R. Kottwitz : *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. 49 (1982), p. 785-806

[K2] ————- : *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Annalen 275 (1986), p. 365-399

[KS1] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[KS2] ——————————- : *On splitting invariants and sign conventions in endoscopic transfer*, prépublication 2012

[Lab1] J.-P. Labesse : *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque 257 (1999)

[Lab2] ————————— : *Stable twisted trace formula : elliptic terms*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 3 (2004), p. 473-530

[LS] R. P. Langlands, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Annalen 278 (1987), p. 219-271

[R1] D. Renard : *Intégrales orbitales tordues sur les groupes de Lie réductifs réels*, J. of Funct. Analysis 145 (1997), p. 374-454

[R2] ————- : *Endoscopy for real reductive groups*, in *On the stabilization of the trace formula*, L. Clozel, M. Harris, J.-P. Labesse, B.-C. Ngô éd., International Press, 2011

[S1] D. Shelstad : *On geometric transfer in real twisted endoscopy*, prépublication 2011

[S2] ——————- : *Characters and inner forms of a quasi-split group over* $\mathbb{R}$, Compositio Math. 39 (1979), p.11-45

[W1] J.-L. Waldspurger : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Memoirs AMS 908 (2008)

[W2] ——————————— : *A propos du lemme fondamental pondéré tordu*, Math. Ann. 343 (2009), p. 103-174

[W3] ——————————— : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012

Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS
2 place Jussieu
75005 Paris

e-mail : waldspur@math.jussieu.fr